KARYA ILMIAH

MENGOPTIMALISASIKAN FUNGSI TUJUAN DENGAN NILAI KENDALA VARIABEL ACAK

OLEH :

DRS. KHAIRUL SALEH, MMA.
NIP. 131.675.581

Dosen Kopertis Wilayah I Sumatera Utara
dpk. Universitas Medan Area

FAKULTAS PERTANIAN
UNIVERSITAS MEDAN AREA
MEDAN
2008

KARYA ILMIAH

MENGOPTIMALISASIKAN FUNGSI TUJUAN DENGAN NILAI KENDALA VARIABEL ACAK

OLEH :

DRS. KHAIRUL SALEH, MMA.
NIP. 131.675.581

Dosen Kopertis Wilayah I Sumatera Utara
dpk. Universitas Medan Area

UNIVERSITAS MEDAN AREA
MEDAN
2008

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karuniaNya sehingga penulis dapat menyelesaikan karya ilmiah ini.

Karya Ilmiah ini disusun sebagai salah satu tugas Tri Dharma Perguruan Tinggi dan juga sebagai pengembangan ilmu pengetahuan khususnya pada bidang Matematika.

Penulis menyadari bahwa Karya Ilmiah ini baik isi maupun cara penulisan dan penyajiannya masih kurang dari sempurna, oleh sebab itu penulis sangat mengharapkan kritikan dan saran dari para pembaca yang sifatnya membangun demi untuk kesempurnaan tulisan ini.

Akhirnya semoga tulisan ini dapat bermanfaat bagi para pembaca yang memerlukannya. Semoga Allah SWT selalu menyertai kita semua. Amin.

Medan, 2 Desember 2008

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG PENELITIAN

Dalam ilmu pengetahuan, khususnya matematika kita dapati data-data yang bersifat:

a. Deterministik

b. Probabilistik.

Deterministik memiliki pengertian bahwa data-data dianggap tidak memiliki perobahan, sedangkan probabilistik memiliki pengertian bahwa data-data tersebut memiliki peluang untuk muncul, dan dalam kehidupan sehari-hari ini sering terjadi, dimana peluang munculnya data-data itu dianggap tertentu dan tersebar secara acak dalam pendistribusiannya.

Didalam pemrograman linier biasa dimana unsur-unsur yang ada di dalamnya yaitu koefisien fungsi tujuan, koefisien kendala dan nilai sebelah kanan bersifat deterministik, kemudian timbul suatu persoalan ketika didapati salah satu unsur-unsurnya, atau semuanya bersifat probabilistik atau variabel acak, , sehingga hal ini mendorong penulis untuk menulis penyelesaian dalam masalah Stochastic Linear Programming dalam penulisan ini penulis membatasi masalah pengoptimalannya dimana hanya nilai sebelah kanannya yang variabel acak, sedangkan unsur yang lain bersifat deterministik termasuk variabel keputusan x_j.

B. PERUMUSAN MASALAH.

Yang menjadi pokok permasalahan dalam Stochastic Linear Programming adalah pengubahan kendala yang memiliki peluang p_i ke dalam bentuk deterministik dengan program chance-constrained, dimana nilai sebelah kanan kendala adalah variabel acak dan diasumsikan berdistribusi normal dengan rata-rata dan varians yang diketahui.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bentuk umum dari persoalan Stochastic Program Linier adalah:

$$\text{Optimumkan}: \; f(x) = \sum_{\forall j} c_j x_j$$

$$\text{Kendala} \quad : \sum a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\text{dan} \qquad x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

dimana c_j, a_{ij}, dan b_i adalah variabel acak dan p_i adalah peluang yang telah ditentukan. Diasumsikan bahwa variabel keputusan x_j adalah deterministik. Terlebih mempertimbangkan kasus khusus dimana hanya c_j atau a_{ij} atau b_i adalah variabel acak dan berdistribusi normal dengan diketahui mean dan standart deviasi.

Dalam program chance-constrained, masalah stochastic program linier dinyatakan :

$$\text{Minimumkan}: \; f(x) = \sum_{\forall j} c_j x_j \qquad [1]$$

$$\text{Kendala} \quad : P\left[\sum a_{ij} x_j \geq b_i\right] \geq p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \ldots\ldots\ldots [2]$$

$$\text{dan} \qquad x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Misalkan $\overline{b_i}$ dan $var(b_i)$ mendefinisikan rata-rata dan varians dari distribusi normal variabel b_i. Kendala dalam persamaan [2] dapat dinyatakan:

$$p\left[\sum a_{ij} x_j \leq b_i\right] = p\left[\frac{\sum a_{ij} x_j - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq \frac{b_i - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}}\right]$$

$$= p\left[\frac{b_i - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}} \geq \frac{\sum a_{ij} x_j - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}}\right] \geq p_i \qquad \ldots\ldots\ldots [3]$$

dimana $[(b_i - \overline{b_i}) / \sqrt{Var(b_i)}]$ adalah variabel normal standart dengan rata-rata nol dan varians satu. Pertidaksamaan [3] dapat dinyatakan:

$$1 - p\left[\frac{b_i - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}} \le \frac{\sum a_{ij}x_j - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}}\right] \ge p_i \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

atau

$$p\left[\frac{b_i - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}} \le \frac{\sum a_{ij}x_j - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}}\right] \le 1 - p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \ldots\ldots\ldots [4]$$

Jika Z merupakan nilai normal standart variabel dimana

$$\phi(Z) = 1 - p_i \ , i = 1, 2, \ldots, m$$

Pertidaksamaan [4] dapat diekpresikan sebagai:

$$\phi\left(\frac{\sum a_{ij}x_j - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}}\right) \le \phi(Z), \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Pertidaksamaan ini dipenuhi jika

$$\frac{\sum a_{ij}x_j - \overline{b_i}}{\sqrt{Var(b_i)}} \le Z, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

atau

$$\sum a_{ij}x_j - \overline{b_i} - Z\sqrt{Var(b_i)} \le 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Sehingga Stochastic Linear Programming dapat dinyatakan permasalahannya dari persamaan [1] kepada [2] yang ekivalen kedalam bentuk Linear Programming deterministik:

$$\text{Optimumkan}: f(x) = \sum_{\forall j} c_j x_j$$

$$\text{Kendala} \quad : \quad \sum a_{ij} x_j - \overline{b_i} - Z\sqrt{Var(b_i)} \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad [4]$$

$$\text{dan} \qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Fungsi padat peubah acak normal X dengan mean μ dan varians σ^2, ialah:

$$N(X:\mu,\sigma) = \frac{e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \qquad ,-\sim \le x \le \sim$$

dengan $\pi = 3{,}14159 \quad e = 1{,}71828 \quad [6]$

Distribusi normal standart ialah distribusi normal dengan mean $\mu = 0$ dan simpangan baku $\sigma = 1$. Fungsi densitasnya berbentuk:

$$F(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}}, -\sim \le z \le \sim$$

Mengubah distribusi normal umum menjadi normal baku dapat ditempuh dengan menggunakan transformasi:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad [5]$$

BAB III

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

A. TUJUAN PENELITIAN

Bertujuan untuk menentukan solusi bagi pengoptimalan fungsi tujuan dengan nilai sebelah kanan kendala adalah variabel acak dan diasumsikan berdistribusi normal dan menguraikannya ke dalam bentuk deterministik yang ekivalen, dengan program chance-constrained sehingga mempermudah pengoptimalannya.

B. MANFAAT PENELITIAN

Penulisan ini bermanfaat bagi pemecahan masalah yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari dimana data-data yang diperoleh selalu bersifat acak (mempunyai peluang) sehingga dalam usaha pengoptimalan fungsi tujuan dengan kendala dimana nilai sebelah kanan variabel acak akan diubah ke dalam bentuk deterministik dengan menggunakan program chance-constrained, sehingga proses pengoptimalan dapat berjalan seperti penyelesaian program linier biasa.

BAB IV

METODOLOGI PENELITIAN

Tulisan ini dimulai dengan membaca buku-buku yang berisikan tentang program Stocastic khususnya dengan Stochastic Linear Programming. Dari buku-buku yang dipelajari, timbul suatu fenomena yaitu dalam pengoptimalan masalah Linear Programming yang memiliki nilai sebelah kanan variabel acak sehingga disebut masalah Stocastic Linear Programming sangat jarang digunakan dalam penerapannya pada dunia pendidikan, sehingga untuk menyelesaikan masalah ini perlu mentransformasikannya ke dalam bentuk deterministik yang ekivalen.

Selanjutnya diadakan tinjauan pustaka yang berisikan teori-teori mendasar dari pengoptimalan yang dibahas dalam bab II dari tulisan ini. Tulisan ini dibatasi hanya pada pembahasan permasalahan Stocastic Linear Programming dengan nilai sebelah kanan yang variabel acak.

Dalam pembuatan tulisan ini tidak dibutuhkan data primer maupun data sekunder, hal ini bisa terjadi karena tulisan ini hanyalah penelitian induktif yaitu penelitian dilakukan dengan mempelajari buku-buku tanpa terjun langsung ke lapangan mengambil data. Oleh karena itu jelaslah tidak diperlukan pengujian kelayakan data dan pengujian kelayakan populasi.

Pada bagian hasil dan pembahasan dijelaskan dengan contoh dari masalah Stocastic Linear Programming dan langkah-langkah penyelesaiannya untuk memperoleh hasil yang maksimal. Dari hasil pembahasan ini kemudian ditarik kesimpulan yang merupakan kesimpulan dari tulisan ini, untuk lebih jelasnya tentang kesimpulan ini akan dibahas dalam bagian kesimpulan dan saran pada bab terakhir dari tulisan ini.

BAB V

HASIL DAN PEMBAHASAN

PENGOPTIMALAN FUNGSI TUJUAN DENGAN NILAI SEBELAH KANAN VARIABEL ACAK

Misalkan diketahui

Max : $f(x) = \sum C_j X_j$

Kendala : $\sum a_{ij} X_j \geq b_i$, $i = 1,2, \ldots, m$

$X_j \geq 0$

Diasumsikan b_i adalah variabel acak yang berdistribusi normal dengan rata-rata dan varians yang diketahui, maka untuk mengoptimalkan fungsi tujuan di atas telah dibahas terlebih dahulu didalam BAB II, sehingga saat ini, disajikan contoh penerapan dalam industri.

Contoh :

1. Jika waktu mesin yang tersedia pada mesin-mesin yang berbeda adalah probabilistik (berdistribusi normal) dengan parameter seperti yang diberikan, tentukan jumlah mesin bagian I dan II yang diproduksi tiap minggu untuk memaksimumkan keuntungan. Kendala-kendala dapat dipenuhi dengan peluang paling sedikit 0,99

tabel 1

Jenis Mesin	Waktu mesin dibutuhkan per buah (menit)		Waktu max yang tersedia tiap minggu (dalam menit)	
	bagian I	bagian II	Rata-rata	Standart deviasi
Mesin bubut	$a_{11} = 10$	$a_{12} = 5$	$\bar{b} = 2500$	$\sigma b_2 = 500$
Mesin giling	$a_{21} = 4$	$a_{22} = 10$	$\bar{b} = 2000$	$\sigma b_2 = 400$
Mesin pengasah	$a_{31} = 1$	$a_{32} = 1,5$	$\bar{b} = 2000$	$\sigma b_2 = 50$
Keuntungan per unit (Rs)	$C_1 = 50$	$C_2 = 100$		

Penyelesaian

Permasalahan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk :

Max : $f(x) = 50 X_1 + 100 X_2$

Kendala : $P [10 X_1 + 5 X_2 \geq b_1] \geq 0,99$

$P [4 X_1 + 10 X_2 \geq b_2] \geq 0,99$

$P [X_1 + 1,5 X_2 \geq b_3] \geq 0,99$

$X_1 \geq 0 \quad , X_2 \geq 0$

Dan b_i memiliki rata-rata dan varians yang diketahui dalam tabel 1 dan berdistribusi normal yang dapat ditransformasikan ke dalam bentuk normal yang dapat ditransformasikan ke dalam bentuk normal standart yaitu $(b_i - \overline{b_i})/\sqrt{var(b_i)}$ atau direpresentasikan dalam nilai Z yang nilainya dapat diperoleh melalui tabel 11.1.

Diketahui $\phi(z) = 1 - P_i = 1 - 0,99 = 0,01$

nilainya tidak dapat diperoleh dari tabel 11.1

Jika demikian, bila $z < 0,001$ dan $1 - P_i < 0,5$ sedemikian hingga, maka

$\phi(-z) = 1 - \phi(z) = 0,99$

Sehingga diperoleh nilai z dari tabel 11.1 yaitu z = -2,33, sehingga kendala dari persamaan [2] dari bab II dalam tinjauan pustaka dapat dipenui sebagai berikut :

$10\ X_1 + 5\ X_2 - 2500 - (-2.33)(500) \leq 0$

$4\ X_1 + 10\ X_2 - 2000 - (-2.33)(400) \leq 0$

$X_1 + 1{,}5\ X_2 - 450 - (-2.33)(50) \leq 0$

Dan diperoleh persamaan baru, yaitu :

Max : $f(x) = 50\ X_1 + 100\ X_2$

Kendala : $10\ X_1 + 5\ X_2 - 1335 \leq 0$

$4\ X_1 + 10\ X_2 - 1068 \leq 0$

$X_1 + 1{,}5\ X_2 - 333{,}5 \leq 0$

$X_1 \geq 0 \quad , X_2 \geq 0$

Untuk menyelesaikan fungsi tujuan tersebut, digunakan metode simpleks

Persamaan Kanonik :

Max : $f(x) = 50\ X_1 + 100\ X_2 + 0\ X_3 + 0\ X_4 + 0\ X_5$

Kendala : $10\ X_1 + 5\ X_2 + X_3 = 1335$

$4\ X_1 + 10\ X_2 + X_4 = 1068$

$X_1 + 1{,}5\ X_2 + X_5 = 333{,}5$

$X_i \geq 0 \quad , i = 1,2, \ldots,5$

Dengan beberapa iterasi, untuk memperoleh hasil akhir, yaitu :

tabel 1

C_j		50	100	0	0	0	Jawab
v.b	n.b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_3	0	10	5	1	0	0	1335
X_4	0	4	10	0	1	0	1068
X_5	0	1	1,5	0	0	1	333,5
$Z_j - C_j$		- 50	- 100	0	0	0	0

X_4 keluar dari variabel basis

X_2 masuk variabel basis

tabel 2

C_j		50	100	0	0	0	Jawab
v.b	n.b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_2	100	0,4	1	0	0,1	0	106.8
X_3	0	8	0	1	-0,5	0	805
X_5	0	0,4	0	0	-0,15	1	160,2
$Z_j - C_j$		- 10	0	0	10	0	10680

X_1 masuk variabel basis

X_3 keluar dari variabel basis

tabel 3

C_j		50	100	0	0	0	Jawab
v.b	n.b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_1	50	1	0	0,125	-0,0625	0	100,625
X_2	100	0	1	-0,05	0,125	0	66,55
X_5	0	0	0	-0,05	-0,125	1	119,95
$Z_j - C_j$		0	0	1,25	9,375	0	11686,25

Dan diperoleh hasil maksimum : $X_1 = 100,625$

$X_2 = 66,55$

$f(x) = 11686,25$

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Program Chance-Constrained merupakan salah satu program yang digunakan dalam stochastik Program Linier untuk mentransformasi fungsi kendala yang probabilistik ke dalam bentuk deterministik. Dengan menentukan nilai normal standart dari peluang yang diketahui dan nilainya dapat diperoleh dari tabel 11.1.

Nilai sebelah kanan kendala yang diketahui variabel acak diasumsikan berdistribusi normal dengan rata-rata dan varians yang diketahui.

Setelah fungsi kendala ditransformasi ke dalam bentuk deterministik, maka dapat dioptimumkan dengan menggunakan teknik-teknik penyelesaian Program Linier.

B. Saran

Karena dalam pengoptimalan fungsi tujuan dan kendala yang telah ditransformasi ke dalam bentuk deterministik dapat memuat n variabel dalam aplikasinya, maka dapat digunakan program komputer untuk menentukan penyelesaian akhir.

Dalam Program Chance-Constrained, transformasi dilakukan hanya berhubungan dengan peluang yang diketahui dan nilai normal standart dapat diperoleh dari tabel 11.1 sehingga tidak perlu program komputer.

DAFTAR PUSTAKA

1. Nasendi. B.D,*"Program Linier dan Variasinya"*,edisi pertama, Penerbit PT Gramedia, anggota IKAPI, Jakarta, 1985.
2. Krajewski.Lee J, Thompson.Howard Elliot,*"Management Science"*,Published Simultaneously in Canada, 1976
3. Siagian.P,*"Penelitian Operasional Teori dan Praktek"*,edisi pertama, Penerbit Universitas Indonesia (UI-Press), Jakarta , 1987
4. SS.Rao,*"Optimization Theory and Application"*, second edition,Published by Mohinder Sinh Sejwal for Wiley Easter Limited,India, 1987
5. Sudjana,*"Metoda Statistik"*, edisi kelima, Penerbit, Tarsito, Bandung, 1992
6. Walpole.E Ronald dan Myers Raymond H,**"Ilmu peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan"**,terjemahan RK Sembiring, Penerbit ITB, Bandung, 1995

TABLE 11.1

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION TABLE

z	$f(z)$	$\phi(z)$
0.0	0.398942	0.500000
0.1	0.396952	0.539828
0.2	0.391043	0.579260
0.3	0.381388	0.617912
0.4	0.368270	0.655422
0.5	0.352065	0.691463
0.6	0.333225	0.725747
0.7	0.312254	0.758036
0.8	0.289692	0.788145
0.9	0.266085	0.815940
1.0	0.241971	0.841345
1.1	0.217852	0.864334
1.2	0.194186	0.884930
1.3	0.171369	0.903199
1.4	0.149727	0.919243
1.5	0.129518	0.933193
1.6	0.110921	0.945201
1.7	0.094049	0.955435
1.8	0.078950	0.964070
1.9	0.065616	0.971284
2.0	0.053991	0.977250
2.1	0.043984	0.982136
2.2	0.035475	0.986097
2.3	0.028327	0.989276
2.4	0.022395	0.991802
2.5	0.017528	0.993790
2.6	0.013583	0.995339
2.7	0.010421	0.996533
2.8	0.007915	0.997445
2.9	0.005952	0.998134
3.0	0.004432	0.998650
3.5	0.000873	0.999767
4.0	0.000134	0.999968
4.5	0.000016	0.999996
5.0	0.0000015	0.9999997