HUBUNGAN ANTARA TEORI SPEKTRAL DAN OPERATOR UNITARY DALAM RUANG HILBERT

Karya Ilmiah

Oleh :

Drs. KHAIRUL SALEH
NIP: 131 675 581

FAKULTAS PERTANIAN
UNIVERSITAS MEDAN AREA
2002

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karuniaNya sehingga penulis dapat menyelesaikan karya ilmiah ini.

Karya ilmiah ini disusun sebagai salah satu tugas Tri Darma Perguruan Tinggi dan juga sebagai pengembangan pengetahuan khususnya dalam bidang matematika murni.
Penulis memyadari bahwa karya ilmiah ini baik dari segi isi maupun penyajiannya masih jauh dari sempurna oleh sebab itu penulis sangat mengharapkan kritikan dan saran dari para - pembaca demi untuk kesempurnaan tulisan ini.

Akhirnya semoga tulisan ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan bagi yang memerlukannya dan semoga Allah SWT selalu menyertai kita semua, Amin.

Medan, September 2002

Penulis,

Drs. Khairul Saleh

DAFTAR ISI

studi pembahasan tentang kasus-kasus tersebut dalam tulisan yang mengambil judul : " Hubungan antara teori spektral dan operator unitary dalam ruang hilbert ".

I.2. PERUMUSAN MASALAH

Suatu operator linier terbatas $T : H \text{---} H$ pada ruang hilbert H disebut suatu operator unitary jika T adalah bijektif dan $T' = T^{-1}$ dimana T' merupakan operator - hilbert-adjoint dari T. Teori spektral adalah suatu teori yang menyangkut ketentuan-ketentuan spektrum (himpunan semua eigenvalue), himpunan resolvent dan famili spektral - dari suatu operator tertentu. Dalam tulisan ini permasalahan yang akan dibahas adalah seberapa jauh hubungan antara teori spektral dan operator unitary dalam ruang hilbert, yang menyangkut bagaimana ketentuan ketentuan spektrum, himpunan resolvent dan famili spektral dalam operator unitary kaitannya dengan ruang hilbert.

I.3. M E T O D O L O G I

Dalam penusunan tulisan ini penulis melakukan suatu - studi literatur dengan menggunakan metode deskripsi dan metode pendekatan teori yaitu dengan menguraikan kemudian - menjelaskan.

I.4. T U J U A N

Dalam tulisan ini tujuan yang akan dicapai adalah untuk mengetahui seberapa jauh hubungan sifat-sifat dan ketentuan-ketentuan teori spektral dan operator unitary dalam ruang hilbert.

1.5. K E G U N A A N

Isi keseluruhan dalam tulisan ini secara langsung akan menambah wawasan pengetahuan penulis dalam studi analisis - fungsional khususnya tentang teori spaktral dan operator uni tary dan hubungannya dengan ruang hilbert serta bagi para - pembaca akan berguna untuk mempelajari lebih jauh tentang - teori spaktral dan pemakaiannya dalam persoalan-persoalan - matriks.

B A B II

LANDASAN TEORI

Sebelum dilakukan pembahasan pada pokok permasalahan dalam bab berikutnya, maka sebagai landasan teori di dalam bab dua ini akan diberikan teori-teori yang mendukung pada pembahasan tersebut. Teori-teori yang dimaksud adalah uraian dan penjelasan tentang pemetaan isometri pada ruang metrik, operator linier atau operator linier terbatas pada ruang bernorm, operator hilbert-adjoint atau operator unitary pada ruang hilbert, teori spektral dari operator linier terbatas dan ketentuan-ketentuan spektral dari operator self adjoint linier terbatas.

II.1. PEMETAAN ISOMETRI PADA RUANG METRIK.

Di dalam garis riel R jarak antara setiap pasangan titik $x,y \in R$ didefenisikan sebagai harga mutlak dari selisih kedua titik tersebut yang dinyatakan dengan $d(x,y) = | x - y |$ Pernyataan ini akan digeneralisasikan kedalam defenisi berikut.

Defenisi 1.

Suatu himpunan tak kosong X dan suatu metrik d yang didefenisikan pada X x X, disebut suatu ruang metrik jika untuk semua $x,y,z \in X$ memenuhi axioma-axioma :

a. $d(x,y) \geq 0$

b. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

c. $d(x,y) = d(y,x)$

d. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Pernyaan c) dari defenisi satu di atas menunjukkan bahwa fungsi jarak d adalah simetri dan pernyataan d) disebut sebagai ketidaksamaan segitiga. Secara umum d(x,y) menyatakan jarak antara titik x dengan titik y.
Sebagai contoh, bidang euclidean R^2 adalah suatu metrik dengan metrik yang disebut metrik euclidean yang didefenisikan dengan :

$$d(x,y) = \sqrt{(\varepsilon_1 - \eta_1)^2 + (\varepsilon_2 - \eta_2)^2}$$

untuk semua $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2) \in R^2$.

Defenisi 2.

Misalkan (X,d) dan (Y,d') adalah ruang metrik maka :

1). Suatu pemetaan $T : X \longrightarrow Y$ disebut suatu isometri jika T tetap mempertahankan jarak yaitu untuk semua $x,y \in X$:

$$d'(Tx,Ty) = d(x,y)$$

2). Ruang metrik X disebut isometrik dengan ruang metrik Y jika terdapat isometrik bijektif dan on to dari X ke Y.

Jadi dua ruang metrik yang isometrik boleh jadi berbeda paling tidak oleh sifat dasar dari titik-titiknya tetapi tidak mempunyai perbedaan dari titik pandang metrik yang didefenisikan pada kedua ruang metrik tersebut.

II.2. OPERATOR LINIER PADA RUANG BERNORM

Suatu ruang vektor atas field K adalah suatu himpunan tak kosong X dengan operasi perjumlahan vektor dan operasi perkalian vektor dengan skalar sedemikian hingga untuk semua x, y, z $\in$ X dan $\alpha, \beta \in$ K memenuhi :

1). $X + Y = Y + X$

2). $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

3). $\exists\, 0 \in X$ sedemikian hingga $0 + X = X + 0 = X$

4). $\exists (-X) \in X$ sedemikian hingga $-X + X = X + -X = 0$

5). $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

6). $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$

7). $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$

8). $1.\ X = X$

K disebut field skalar dari ruang vektor X dan X disebut suatu ruang vektor riel jika K = R serta X disebut suatu ruang vektor kompleks jika K = C

Defenisi 3 .

Suatu ruang vektor X dengan suatu norm $\|\cdot\|$ yang didefenisikan pada X disebut suatu ruang bernorm jika untuk semua x, y $\in$ X, memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

a). $\| X \| \geq 0$

b). $\| X \| = 0$ jika dan hanya jika $X = 0$

c). $\| \alpha X \| = |\alpha|\, \| X \|$

d). $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$.

Suatu ruang bernorm yang komplit yaitu komplit dalam metrik yang diinduksikan dengan norm $d(x,y) = \| x - y \|$ - untuk semua $x,y \in X$ disebut suatu ruang Banach.

Aksioma 1) sampai dengan 4) dari defanisi 3. di atas untuk suatu norm adalah disugesti dan dimotivasi oleh panjang $| X |$ dari suatu vektor x dalam aljaber vektor elementer. Sehingga dalam kasus ini dapat ditulis $\| X \| = | X |$. Kenyataannya aksioma 1) dan 2) menyatakan bahwa semua vektor mempunyai panjang yang positif kecuali vektor nol yang mempunyai panjang nol.

Defenisi 4.

Misalkan X dan Y adalah ruang vektor atas field K yang sa6 ma. Suatu pemetaan $T : \longrightarrow Y$ disebut operator linier jika untuk semua $x_1, x_2 \in X$ dan $\alpha, \beta \in K$ memenuhi :

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$$

Defenisi 5.

Misalkan X dan Y adalah ruang bernorm dan $T : X \longrightarrow Y$ suatu operator linier. T disebut operator linier terbatas jika terdapat suatu bilangan riel c sedemikian hingga

$$\| Tx \| \leq c \, \| x \|$$

Sekarang timbul pertanyaan, yaitu berapakah nilai terkecil yang mungkin dari c sedemikian hingga 1) masih dipenuhi untuk semua $x \in X$ dimana $x \neq 0$. dan ketidaksamaan 1) dapat - ditulis dengan :

$$\frac{\| Tx \|}{\| x \|} \leq c \qquad (x \neq 0)$$

Ini menunjukkan bahwa c paling tidak haruslah sebesar suprenum dari ruas kiri yang diambil atas $X - \{0\}$. Dengan demikian jawaban untuk pertanyaan di atas yaitu nilai terkecil yang mungkin dari c dalam 1) adalah supremum.
Besaran ini dinotasikan dengan $\|T\|$, jadi :

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

dan $\|T\|$ disebut norm dari operator T. Sehingga dengan $c = \|T\|$, ketidaksamaan 1) menjadi :

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$$

II.3. OPERATOR UNITARY DALAM RUANG HILBERT

Didalam aljabar elementer, perkalian titik (dot product) dari dua buah vektor akan menghasilkan skalar. Dan dalam pembicaraan tentang ruang vektor pernyataan ini akan digeneralisir ke dalam pengertian inner product seperti - yang didefenisikan berikut :

Defenisi 6.

Misalkan X suatu ruang vektor, suatu inner product pada X adalah suatu pemetaan dari X x X ke K yaitu dengan setiap pasangan vektor $x, y \in X$ diassosiasikan suatu skalar $\langle x,y \rangle$ sedemikian hingga untuk semua $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in K$ memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1) $\langle x,x \rangle \geq 0$ dan $\langle x,x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2). $\langle x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$

3). $\langle x,y \rangle = \langle \overline{y,x} \rangle$

4). $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$.

X dengan suatu inner product yang didefenisikan pada X disebut ruang inner product dan suatu ruang inner product yang komplit yaitu komplit dalam metrik yang didefenisikan dengan inner product $d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ untuk semua $x, y \in X$ disebut suatu ruang Hilbert.

Aksioma 3) dalam defenisi 6). di atas tanda bar menyatakan konjugasi kompleks. Karena itu jika X adalah suatu ruang vektor riel maka $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$. Dari aksioma 2) sampai 4) dapat diturunkan formula berikut :

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$$

$$\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \bar{\beta}\langle x,z\rangle$$

dimana $\bar{\alpha}$ dan $\bar{\beta}$ merupakan konjugasi kompleks dari α dan β berturut-turut.

Defenisi 7.

Suatu ruang vektor X disebut direct sum dari dua subruang Y dan Z dari X, ditulis :

$$X = Y \oplus Z$$

Jika setiap $x \in X$ mempunyai suatu representasi tunggal

$$x = y + z \qquad (y \in Y,\ z \in Z)$$

Dan Z disebut suatu komplemen aljabar dari Y dalam X dan sebaliknya.

Dengan cara yang sama dalam kasus ruang Hilbert umum H, representasi yang diinginkan dari H adalah suatu direct sum dari suatu subruang Y dan komplemen ortogonalnya :

$Y^{\perp} = \{z \in H \,/\, z \perp Y\}$, yang merupakan himpunan semua vektor-vektor yang ortogonal terhadap Y. Selanjutnya jika untuk setiap $x \in H$ terdapat suatu $y \in Y$ sedemikian hingga

$$x = y + z, \qquad z \in Z = Y^{\perp}$$

maka y disebut proyeksi ortogonal dari x pada y.

Persamaan diatas mendefenisikan suatu pemetaan :

$$P : H \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y = Px$$

P disebut proyeksi(operator proyeksi) dari H pada Y maka jelas bahwa P adalah suatu operator linier terbatas.

P memetakan H pada Y, Y kedirinya sendiri dan $Z = Y^{\perp}$ ke$\{0\}$, serta P adalah idempoten yaitu $P^2 = P$ jadi untuk setiap : $x \in H$ maka diperoleh $P^2x = P(Px) = Px$

Lemma 2.1.

Jika $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$ untuk semua w dalam ruang inner product X maka $v_1 = v_2$ khususnya $\langle v_1, w\rangle = 0$ untuk semua $w \in X$ mengakibatkan $v_1 = 0$.

Bukti :

Dengan pengasumsian untuk semua w,

$$\langle v_1 - v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle - \langle v_2, w\rangle = 0$$

untuk $w = v_1 - v_2$ ini mengakibatkan $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$ oleh karena itu $v_1 - v_2 = 0$ sehingga $v_1 = v_2$. Khususnya $\langle v_1, w\rangle = 0$ dengan $w = v_1$ mengakibatkan $\|v_1\|^2 = 0$ sehingga $v_1 = 0$.

Defenisi 8.

Misalkan H_1 dan H_2 adalah ruang hilbert dan pemetaan T : $H_1 \longrightarrow H_2$ merupakan suatu operator linier terbatas, maka terdapat operator hilbert adjoint T^* dari T dimana T^* : $H_2 \longrightarrow H_1$ sedemikian hingga untuk semua $x \in H_1$ dan $y \in H_2$,

$$\langle Tx,y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

Kenyataannya operator hilbert adjoint T^* dari T seperti - yang didefenisikan di atas adalah tunggal dan merupakan suatu opertaor linier terbatas dengan norm :

$$\| T^* \| = \| T \|$$

Lemma 2.2.

Misalkan X dan Y adalah ruang inner product dan $Q : X \longrightarrow Y$ suatu operator linier terbatas, maka :

a. $Q = 0$ jika dan hanya jika $\langle Qx,y \rangle = 0$ untuk semua $x \in X$, $y \in Y$.

b. Jika $Q : X \longrightarrow X$, dimana X adalah kompleks dan $Qx,x = 0$ untuk semua $x \in X$ maka $Q = 0$

Bukti :

a. $Q = 0$ memberi arti bahwa $Qx = 0$ untuk semua $x \in X$ dan akibatnya $\langle Qx,y \rangle = \langle 0,y \rangle = 0 \langle w,y \rangle = 0$ sebaliknya, $\langle Qx,y \rangle = 0$ untuk semua x dan y akan mengakibatkan $Qx = 0$ untuk semua x berdasarkan lemma 2.1 karenanya $Q = 0$ berdasarkan defenisi.

b. Dari pengamatan, $\langle Qv,v\rangle = 0$ untuk setiap $v = x+y \in X$ yaitu :

$$0 = \langle Q\langle x+y\rangle,\ x+y\rangle$$
$$= |\alpha|^2\langle Qx,x\rangle + \langle Qy,y\rangle + \alpha\langle Qx,y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy,x\rangle$$

Dua suku pertama pada ruas kanan sama dengan 0 berdasarkan pengasumsian dan $\alpha = 1$ akan mengakibatkan :

$$\langle Qx,y\rangle + \langle Qy,x\rangle = 0$$

$\alpha = i$ menjadikan $\bar{\alpha} = -i$ dan

$$\langle Qx,y\rangle - \langle Qy,x\rangle = 0$$

Dengan menjumlahkan **kedua** persamaan di atas maka diperoleh $\langle Qx,y\rangle = 0$ dan berdasarkan pernyataan a. maka $Q = 0$.

Teorema 2.1.

Misalkan H_1 dan H_2 adalah ruang hilbert, $S : H_1 \longrightarrow H_2$ dan $T : H_1 \longrightarrow H_2$ masing-masing merupakan operator linier terbatas serta $\alpha \in K$, maka :

a. $\langle T^*y,x\rangle = \langle y,Tx\rangle$ dimana $x \in H_1$ dan $y \in H_2$

b. $(S+T)^* = S^* + T^*$

c. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$

d. $(T^*)^* = T$

e. $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

f. $T^*T = 0 \Longleftrightarrow T = 0$

g. $(ST)^* = T^*S^*$ dimana $H_2 = H_1$

Bukti :

a. Dari defenisi, $\langle T^*y,x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \langle \overline{Tx,y}\rangle = \langle y,Tx\rangle$

b. Juga dari defenisi bahwa untuk semua x dan y

$$\begin{aligned}\langle x,(S+T)^*y\rangle &= \langle (S + T)\ x,y\rangle \\ &= \langle Sx,y\rangle + \langle Tx,y\rangle \\ &= \langle x,S^*y\rangle + \langle x,T^*y\rangle \\ &= \langle x,\ (S^* + T^*)\ y\rangle\end{aligned}$$

sehingga menurut lemma 2.1 : $(S + T)^*y = (S^*+T^*)y$ untuk semua y sehingga $(S + T)^* = S^* + T^*$

c. Untuk pernyataan c. ini dapat diaflikasikan lemma 2.2

a. Untuk $Q = (\alpha T)^* - \bar{\alpha}\ T^*$,

$$\begin{aligned}\langle (\alpha T)^*y,x\rangle &= \langle y,(\alpha T)x\rangle \\ &= \langle y,\ \alpha(Tx)\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y,Tx\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle T^*y,x\rangle \\ &= \langle \bar{\alpha}\ T^*y,x\rangle\end{aligned}$$

d. $(T^*)^*$ yang dapat ditulis dengan T^{**} sama dengan T sebab untuk semua $x \in H_1$ dan $y \in H_2$ berdasarkan pernyataan a. dan defenisi dari T^* maka diperoleh :

$$\langle (T^*)^*x,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle = \langle Tx,\ y\rangle$$

sehingga dengan menggunakan lemma 2.2 untuk $Q = (T^*) - T$ maka $(T^*)^* = T$

e. Dapat dilihat bahwa $T^*T : H_1 \longrightarrow H_2$ tetapi $TT^* :$ $H_2 \longrightarrow H_1$ dan

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$$
$$\leq \|T^*Tx\| \, \|x\|$$
$$\leq \|T^*T\| \, \|x\|^2$$

Dengan mengambil supremum atas semua x yang mempunyai norm 1, diperoleh : $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Kemudian berdasarkan a. diperoleh :

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$$

Sehingga $\|T^*T\| = \|T\|^2$, gantikan T dengan T^* lalu gunakan persamaan 5 sehingga diperoleh :

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$$

f. Berdasarkan pernyataan e, dengan jelas akan dipenuhi

$T^*T = 0$ jika dan hanya jika $T = 0$

g. Dari defenisi,

$$\langle x, (ST)^*y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$$

Sehingga berdasarkan lemma 2.1, $(ST)^*y = T^*S^*y$ untuk semua y yang mana mengakibatkan $(ST)^* = T^*S^*$.

Kelas- kelas dari operator linier terbatas yang sangat penting dalam aplikasinya dapat didefenisikan dengan menggunakan operator hilbert-adjoint di atas.

Defenisi 8.

Suatu operator linier terbatas $T : H \longrightarrow H$ pada ruang hilbert disebut :

a. Self-adjoint atau Hermitian jika $T^* = T$

b. Unitary jika T bijektif dan $T^* = T^{-1}$

c. Normal jika $TT^* = T^*T$

Teorema 2.2

Misalkan $T : H \longrightarrow H$ suatu operator linier terbatas pada ruang hilbert H maka :

a. Jika T hermitian, $\langle Tx,x \rangle$ adalah riel untuk semua $x \in H$

b. Jika H adalah kompleks dan $\langle Tx,x\rangle$ adalah riel untuk semua $x \in H$, operator T adalah hermitian.

Bukti :

a. Jika T adalah hermitian, maka untuk semua x berlaku :

$$\langle \overline{Tx,x} \rangle = \langle x,Tx \rangle = \langle Tx,x\rangle$$

sehingga $\langle Tx,x\rangle$ sama dengan konjugasi kompleksnya karena itu $\langle Tx,x \rangle$ adalah riel.

b. Jika $\langle Tx,x \rangle$ adalah riel untuk semua x, maka :

$$\langle Tx,x \rangle = \langle \overline{Tx,x} \rangle = \langle x,T^*x \rangle = \langle T^*x,x\rangle$$

sehingga :

$$0 = \langle Tx,x \rangle - \langle T^*x,x \rangle = \langle (T - T^*)x,x\rangle$$

dan menurut lemma 2.2. b, $T - T^* = 0$ sebab H adalah kompleks.

Berikut ini akan diberikan suatu teorema yang khusus membicarakan tentang operator unitary.

Teorema 2.3

Misalkan H suatu ruang hilbert, $U : H \longrightarrow H$ dan $V : H \longrightarrow H$ adalah operator unitary maka :

a. U adalah isometrik yaitu $\|Ux\| = \|x\|$ untuk semua $x \in H$.

b. $\|U\| = 1$, dimana $H \neq \{0\}$

c. U^{-1} $(= U^*)$ adalah operator unitary

d. UV adalah operator unitary

e. U adalah operator normal

f. Suatu operator linier terbatas T pada suatu ruang hilbert kompleks H adalah unitary jika dan hanya jika T adalah pemetaan isometri dan surjektif.

Bukti :

a. $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, Ix \rangle = \|x\|^2$

dimana I pemetaan identitas.

b. Dari a. yaitu $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$ didapat $\|U\| = 1$

c. Karena U bijektif maka U^{-1} juga bijektif dan dengan teorema 2.1.

$$(U^{-1})^* = U^{**} = U = (U^{-1})^{-1}$$

d. UV adalah bijektif dan teorema 2.1. memberikan :

$$(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$$

e. Karena U^{-1} dan $UU^{-1} = U^{-1}U = I$ maka $UU^* = U^*U$ yang menunjukkan bahwa U adalah suatu operator unitary.

f. Andaikan T isometrik dan surjektif dimana isometrik mengakibatkan injektivitas, sehingga T adalah bijektif. Akan ditunjukkan bahwa $T^* = T^{-1}$. Dengan isometri,

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$$

sehingga :

$\langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$ dan menurut lemma 2.2.b. :

$T^*T - I = 0$ yang mengakibatkan $T^*T = I$.

Karenanya :

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT = I$$

Darisini diperoleh : $T^*T = TT^* = I$ sehingga $T^* = T^{-1}$ yang menunjukkan bahwa T adalah unitary. Sedang sebaliknya jelas dipenuhi sebab T adalah isometri berdasarkan pernyataan a. dan surjektif berdasarkan defanisi.

II.4. TEORI SPEKTRAL DARI OPERATOR LINIER TERBATAS.

Untuk suatu matriks bujur sangkar (riel atau kompleks) $A = (\alpha_{jk})$ berukuran n x n, konsep-konsep dari eigenvalue dan eigenvektor didefenisikan dalam bentuk-bentuk persamaan

$$Ax = \lambda x$$

sebagai berikut :

Defenisi 9.

Eigenvalue dari suatu matriks bujur sangkar $A = (\alpha_{jk})$ adalah suatu bilangan λ sedemikian hingga $Ax = \lambda x$ mempunyai suatu penyelesaian $x \neq 0$. Sedang x disebut eigenvektor dari A yang bersesuaian dengan eigenvalue λ. Eigen vektor-eigenvektor yang bersesuaian dengan eigenvalue λ bersama-sama dengan vektor nol membentuk suatu subruang vektor dari x yang disebut eigenspaces dari A yang bersesuaian dengan eigenvalue λ. Himpunan semua eigenvalue dari A ditulis $\sigma(A)$ disebut spektrum dari A, sedang komplemen $\sigma(A)$ dalam bilangan kompleks yaitu $\rho(A) = C - \sigma(A)$ disebut himpunan resolvent dari A.

Perlu juga diketahui bahwa persamaan diatas dapat juga ditulisan dalam bentuk :

$$(A - \lambda I)x = 0$$

dimana I adalah matriks satuan berorder n. Persamaan ini merupakan sistem homogen dari persamaan linier dalam n bilangan anu $\xi_1, \ldots\ldots\ldots, \xi_n$ yaitu komponen-komponen dari x. Determinan dari koefisien-koefisiennya sama dengan determinan $(A - \lambda I)$ yang mana harus sama dengan nol supaya persamaan $(A - \lambda I)x = 0$ mempunyai suatu penyelesaian $x \neq 0$. Ini memberikan persamaan karakteristik dari A yaitu :

$$\det(A - \quad I) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\det(A - \lambda I)$ ini disebut determinan karakteirstik dari A. Dengan menyederhanakannya maka akan diperoleh suatu polinomial berderajat n dalam λ yaitu polinomial karakteristik dari A. Sekarang misalkan $X \neq \{0\}$ suatu ruang bernorm kompleks dan $T : D(T) \longrightarrow X$ adalah suatu operator linier dengan domain $D(T)$ X. Dengan T diassisiasikan operator

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

dimana adalah suatu bilangan kompleks dan I operator identitas pada $D(T)$. Jika T mempunyai suatu invers dinotasikan dengan $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ dan disebut operator resolvent dari T atau disingkat resolvent dari T. Untuk pembicaraan selanjutnya resolvent $R_\lambda(T)$ dan T hanya ditulis dengan R_λ saja.

Defenisi 10.

Misalkan $X \neq \{0\}$ suatu ruang bernorm kompleks dan $T : D(T) \longrightarrow X$ suatu operator linier dengan $D(T) \subset X$. Suatu nilai reguler λ dan T adalah suatu bilangan kompleks sedemikian hingga :

(R_1). $R_\lambda(T)$ ada.

(R_2). $R_\lambda(T)$ terbatas

(R_3). $R_\lambda(T)$ didefenisikan pada suatu himpunan yang padat dalam X.

Himpunan resolvent $\rho(T)$ dari T adalah himpunan semua nilai reguler dari T sedang komplemennya dalam bilangan kompleks C yaitu $\sigma(T) = C - \rho(T)$ disebut spektrum dari T dan suatu $\lambda \in \sigma(T)$ disebut nilai spektral dari T,

Teorema 2.4.

Misalkan $T \in B(X,X)$ dimana $B(X,X)$ adalah himpunan semua operator linier terbatas pada ruang banach X. Jika $\|T\| < 1$ maka $(I - T)^{-1}$ ada dan merupakan suatu operator linier terbatas pada X serta

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \ldots\ldots..$$

Bukti :

perlu dicatat bahwa $\| T^j \| \leq \|T\|^j$ dan deret geometri :

$\sum \|T\|^j$ konvergen untuk $\|T\| < 1$. Sehingga rumus diatas konvergen absolut untuk $\|T\| < 1$. Karena X komplit maka jelas bahwa $B(X,X)$ juga komplit.

Jumlah deret dalam rumus di atas sebut saja dengan S dan akan ditunjukkan bahwa : $S = (I - T)^{-1}$ untuk itu maka diperoleh :

$$\begin{aligned}(I - T)(I + T + \ldots. + T^n) &= (I + T + \ldots.+ T^n)(I - T)\\ &= I - T^{n+1}\end{aligned}$$

Sekarang misalkan $n \longrightarrow \infty$, maka $T^{n+1} \longrightarrow 0$ sebab $\|T\| < 1$ sehingga diperoleh :

$(I - T)S = S(I - T) = I$, ini menunjukkan bahwa

$S = (I - T)^{-1}$

Teorema 2.5.

Himpunan resolvent $\rho(T)$ dari suatu operator linier terbatas T pada suatu ruang banach kompleks X adalah terbuka dan karenanya spektrum $\sigma(T)$ adalah tertutup.

Bukti :

Jika $\rho(T) = \emptyset$ jelas terbuka, sekarang misalkan $\rho(T) \neq \emptyset$ untuk suatu $\lambda_0 \in \rho(T)$ dan $\lambda \in C$ maka diperoleh :

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0) I$$

$$= (T - \lambda_0 I)\left[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}\right]$$

Dengan memisalkan operator dalam kurung $[\ldots]$ sama dengan V, maka :

$$T_\lambda = T_{\lambda_0} V \text{ dimana } V = I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}$$

Karena $\lambda_0 \in \rho(T)$ dan T terbatas maka $R_{\lambda_0} = T^{-1} \in B(X,X)$.

Selanjutnya teorema 2.4. menunjukkan bahwa V mempunyai invers dalam bentuk :

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\right]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R^j$$

Dalam $B(X,X)$ untuk semua λ sedemikian hingga $\|(\lambda - \lambda_0) R\| < 1$ yaitu :

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

Karena $T^{-1}_{\lambda_0} = R_{\lambda_0} \in B(X,X)$ dan dari rumus diatas untuk setiap yang memenuhi rumus $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ operator T_λ mempunyai suatu invers :

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0}$$ adalah sebarang.

Oleh karena itu komplemen $\sigma(T) = C - \rho(T)$ adalah sifatnya tertutup.

Teorema 2.6.

Untuk X dan T seperti yang dinyatakan dalam teorema 2.5. dan setiap $\lambda_0 \in \rho(T)$, resolvent $R_\lambda(T)$ mempunyai representasi :

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j \, R_{\lambda_0}^{j+1}$$

dimana deret ini konvergen absolut untuk setiap λ seperti yang diberikan oleh persamaan :

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

dalam bidang kompleks.

Teorema 2.7.

Spektrum $\sigma(T)$ dari suatu opertor linier terbatas $T : X \longrightarrow X$ pada ruang banach kompleks X adalah kompak dan berada dalam lingkaran :

$$|\lambda| \leq \|T\|$$

untuk mana himpunan resolvent $\rho(T) \neq \emptyset$

Bukti :

Misalkan $\lambda \neq 0$ dam $k = 1/\lambda$. Dari teorema 2,4 diperoleh representasi :

$$\begin{aligned} R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} &= -1/\lambda \, (I - kT)^{-1} \\ &= -1/\lambda \sum_{j=0}^{\infty} (kT)^j \\ &= -1/\lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1/\lambda \, T)^j \end{aligned}$$

dimana oleh teorema 2.4. deret konvergen untuk semua se- demikian hingga :

$$\left\| 1/\lambda \; T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1 \quad \text{yaitu } |\lambda| > \|T\| .$$

Teorema 2.4. juga menunjukkan bahwa setiap λ yang demikian berada pada ρ (T). Sehingga spektrum σ(T) = C − ρ (T), haruslah berada dalam $|\lambda| \leq \|T\|$ karenanya σ(T) adalah terbatas dan menurut teorema 2.5. ini mengakibatkan σ(T) tertutup sehingga σ(T) adalah kompak.

2.5. HUBUNGAN ANTARA TEORI SPEKTRAL DAN OPERATOR LINIER DALAM RUANG HILBERT.

Spektrum V(T) dari suatu operator linier hermitian terbatas T adalah riel. Dalam bagian ini akan diperlihatkan bahwa - adanya hubungan antara teori spektral dan operator linier dalam ruang hilbert,

Teorema 2.8.

Spektrum (T) dari operator linier hermitian terbatas T : H $\longrightarrow$ H pada suatu ruang hilbert kompleks H berada dalam - interval tertutup $[m, M]$ pada sumbu riel, dimana :

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \; ; \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$$

Bukti :

σ (T) jelas berada digaris riel oleh karena itu tinggal hanya menunjukkan bahwa setiap bilangan riel $\lambda = M + c$ dengan $c > 0$ termuat dalam himpunan resolvent ρ (T). Untuk - setiap $x \neq 0$ dan $v = \|x\|^{-1}$ didapat $x = \|x\| \; v$ dan

$$\langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \langle Tv, v \rangle \leq \|x\|^2 \sup_{\|\bar{v}\|=1} \langle T\bar{v}, \bar{v} \rangle = \langle x, x \rangle M.$$

Sehingga $\quad -\langle Tx,x\rangle \geqslant -\langle x,x\rangle M$ dan

$$\|T_\lambda x\|\,\|x\| \geqslant -\langle T_\lambda x,x\rangle = -\langle Tx,x\rangle + \lambda\langle x,x\rangle$$
$$\geqslant (-M+\lambda)\langle x,x\rangle$$
$$= c\,\|x\|^2$$

dimana $c = \lambda - M > 0$ dengan pengasumsian. Jika $c\,\|x\|^2$ dibagi dengan $\|x\|$, maka diperoleh ketidaksamaan $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$. Karena itu $\lambda \in \rho(T)$. Untuk suatu bilangan riel - $\lambda < m$ pembuktiannya sama.

Teorema 2.9.

Untuk setiap operator linier Helmitian terbatas T pada suatu ruang hilbert kompleks H berlaku :

$$\|T\| = \text{maks.}(|m|\,,|M|) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx,x\rangle|$$

dimana m dan M adalah seperti yang dinyatakan dalam teorema 2.8.

Bukti :

Perlu diketahui bahwa :

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx,x\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\,\|x\| = \|T\|, \text{yaitu}$$

$K \leq \|T\|$ dimana K menyatakan sajian pada ruas kiri. Akan - ditunjukkan bahwa $\|T\| \leq K$. Jika $Tz = 0$ untuk semua z dengan norm 1 maka $T = 0$. Dalam hal lainnya untuk x dengan - norm 1 sedemikian hingga $Tz \neq 0$, ambil $v = \|Tz\|^{-\frac{1}{2}}\,Tz$. Maka $\|v\|^2 = \|w\|^2 = \|Tz\|$. Sekarang ambil $y_1 = v + w$ dan $y_2 = v - w$ sehingga dengan perhitungan maju karena se -

jumlah bentuk dikeluarkan dan T adalah hermitian,

$$\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle = 2\,(\langle Tv, w\rangle + \langle Tw, v\rangle)$$
$$= 2\,(\langle Tz, z\rangle + \langle T^2 z, z\rangle)$$
$$= 4\ \|Tz\|^2$$

SSekarang untuk setiap $y \neq 0$ dan $x = \|y\|^{-1}y$ diperoleh :

$$y = \|y\|\ x \quad \text{dan}$$

$$|\langle Ty, y\rangle = \|y\|^2 \quad |\langle Tx, x\rangle \leq \|y\|^2 \sup_{\|x\| = 1} |\langle Tx, x\rangle|$$
$$= K\,\|y\|^2$$

Sehingga dengan ketidaksamaan segitiga,

$$|\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle| \leq |\langle Ty_1, y_1\rangle + |\langle Ty_2, y_2\rangle|$$
$$K(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2$$
$$= 2K\,(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$
$$= 4K\ \|Tz\|.$$

Dari ketidaksamaan ini dan $Ty_1, y_1 - Ty_2, y_2 = 4 \quad Tx^2$

diperoleh bahwa :

$$4\ \|Tz\|^2 \leq 4K\ \|Tz\|$$

karena itu $\|Tz\| \leq K$, dengan mengambil supremum atas semua z dengan morm 1 maka diperoleh $\|T\| \leq K$. Dari kasus - $\|T\| \geq K$ dan $\|T\| \leq K$ maka diperoleh persamaan :

$$\|T\| = \sup_{\|x\| = 1} |\langle Tx, x\rangle|$$

Selanjutnya dengan operator linier helmitian terbatas :

$T : H \longrightarrow H$ pada suatu ruang hilbert kompleks H da pat diassosiasikan suatu famili spektral $\mathcal{E}$ sedemikian hingga $\mathcal{E}$ dapat digunakan untuk suatu representasi spektral dari T. Untuk mendefenisikan $\mathcal{E}$ dipergunakan operator :

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

Akar kuadrat positip dari T_λ^2 yang dinotasikan dengan :

$$B_\lambda = (T_\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

dan operator

$T_\lambda^+ = \frac{1}{2} (B_\lambda + T_\lambda)$ yang disebut bagian positif (potitive part) dari T_λ .

Jadi famili spektral $\mathcal{E}$ dari T didefenisikan dengan :

$$\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in R}$$

dimana E_λ adalah proyeksi dari H pada ruang null $N(T_\lambda^+)$ dari T_λ^+ .

Seterusnya didefenisikan operator-operator berikut :

$B = (T^2)^{\frac{1}{2}}$ (akar kuadrat positif dari T^2

$T^+ = \frac{1}{2} (B + T)$ (bagian positif dari T)

$T^- = \frac{1}{2} (B - T)$ (bagian negatif dari T)

dan proyeksi dari H pada ruang null dari T^+ yang dinotasikan dengan E yaitu :

$$E : H \longrightarrow Y = N(T^+)$$

dan dari pendefenisian T^+ dan T^- diperoleh suatu relasi

$$T = T^+ - T^- \qquad \text{dan} \qquad B = T^+ + T^-$$

Teorema 2.10.

Misalkan $T \longrightarrow H$ suatu operator linier hermitian terbatas pada ruang hilbert kompleks H. Selanjutnya misalkan E_λ proyeksi dari H pada ruang null $Y_\lambda = N(T_\lambda^+)$ dari bagian positif T^+_λ dari $T_\lambda = T - \lambda I$. Maka $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in R}$ adalah suatu famili spektral pada interval $[m, M] \subset R$, dimana m dan M seperti yang dijelaskan pada teorema sebelumnya.

Bukti :

Akan dibuktikan :

a. $\lambda < \mu \Longrightarrow E_\lambda \leq E_\mu$

b. $\lambda < m \Longrightarrow E_\lambda = 0$

c. $\lambda \geq \mu \Longrightarrow E_\lambda = I$

d. $\mu \to \lambda + 0 \Longrightarrow E_\mu x \longrightarrow E_\lambda x$

Untuk itu ditinjau ketentuan-ketentuan berikut ini :

$$T^+_\mu T^-_\mu = 0 \qquad \text{dan}$$

$$T_\lambda E_\lambda = -T^-_\lambda \quad ; \quad T_\lambda (I - E_\lambda) = T^+_\lambda \quad ; \quad T_\mu E_\mu = -T^{-1}_\mu$$

serta : $T^+_\lambda \geq 0$; $T^-_\lambda \geq 0$; $T^+_\mu \geq 0$; $T^-_\mu \geq 0$

a. Misalkan $\lambda < \mu$, maka $T_\lambda = T^+_\lambda - T^-_\lambda \leq T^+$, sebab $-T^- \leq 0$ sehingga :

$$T^+_\lambda - T_\mu \geq T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda) I \geq 0.$$

$T^+_\lambda - T_\mu$ adalah helmitian dan komutatif dengan T^+_μ dan $T^+_\mu \geq 0$, kemudian :

$$T^+_\mu (T^+_\lambda - T_\mu) = T^+_\lambda \; (T^+_\lambda - T^+_\mu + T^-_\mu) \geq 0 \qquad \text{dan}$$

$T^+_\mu T^-_\mu = 0$, oleh sebab itu : $T^+_\mu \; T^+_\lambda \geq T^{+2}_\mu$ yaitu untuk - semua $x \in H$.

$$\langle T^+ T^+ x,x\rangle \geq \langle T^{+2} x,x\rangle = \| T^+_\mu x\|^2 \geq 0$$

Ini menunjukkan bahwa $T^+x = 0$ mengakibatkan $T^+_\mu x = 0$. Dengan demikian $N(T^+_\lambda) \subset N(T^+_\mu)$ sehingga $E_\lambda \leq E_\mu$ dimana $\lambda < \mu$

b. Misalkan $\lambda <$ m tetapi meskipun demikian misalkan pula - $E_\lambda \neq 0$ maka $E_\lambda z \neq 0$ untuk suatu z. Ambil $x = E_\lambda z$ maka $E_\lambda x = E^2_\lambda z = x$ dan tanpa kehilangan keumuman dapat diasumsikan bahwa $\|x\| = 1$, akibatnya :

$$\begin{aligned}
\langle T_\lambda E_\lambda x,x\rangle &= \langle T_\lambda x,x\rangle \\
&= \langle Tx,x\rangle - \lambda \\
&\geq \inf_{\|x\|=1} \langle T\bar{x},\bar{x}\rangle - \lambda \\
&= m - \lambda > 0
\end{aligned}$$

Tetapi ini kontradiksi dengan $T_\lambda E_\lambda = -T^-_\lambda \leq 0$ yang didapat dari persamaan :

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|E_{\lambda_0}\|}$$ dan persamaan :

$$T^+ \geq 0 \quad ; \quad T^-_\lambda \geq 0 \quad ; \quad T^+_\mu \geq 0 \quad \text{dan} \quad T^-_\mu \geq 0.$$

c. Andaikan bahwa $\lambda > M$ tetapi $E_\lambda \neq I$ sehingga $I - E_\lambda \neq 0$ maka $(I - E_\lambda)x = x$ untuk suatu x dengan $\|x\| = 1$. Karena itu :

$$\begin{aligned}
\langle T_\lambda (I - E_\lambda)x,x\rangle &= \langle T_\lambda x,x\rangle \\
&= \langle Tx,x\rangle - \lambda \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \langle T\bar{x},x\rangle - x \\
&= M - \lambda < 0
\end{aligned}$$

Tetapi ini kontradiksi dengan $T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+ \geqslant 0$ yang diperoleh dari persamaan :

$$T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^- \;;\; T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+ \text{ dan } T_\mu E_\mu = -T_\mu^-$$

dan persamaan :

$$T_\lambda^+ \geqslant 0 \;;\; T_\lambda^- \geqslant 0 \;;\; T_\mu^+ \geqslant 0 \text{ dan } T_\mu^- \geqslant 0$$

juga $E_M = 1$ oleh kontinuitas dari ruas kanan.

d. Dengan suatu interval $\Delta = (\lambda, \mu)$ diassosiasikan operator $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$. Karena $\lambda < \mu$ maka $E_\lambda \leq E_\mu$ berdasarkan kasus a. sehingga $E_\lambda(H) < E_\mu(H)$ dan $E(\Delta)$ adalah suatu proyeksi dan juga $E(\Delta) \geqslant 0$, oleh karena itu diperoleh :

$$E_\mu E(\Delta) = E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta)$$

$$(I - E_\lambda)E(\Delta) = E(\Delta) - E_\lambda(E_M - E_\lambda) = E(\Delta)$$

Karena $E(\Delta)$, T_μ^- dan T_λ^+ adalah positif dan komutatif berdasarkan :

$$T_\lambda^+ \geqslant 0 \;;\; T_\lambda^- \geqslant 0 \;;\; T_\mu^+ \geqslant 0 \text{ dan } T_\mu^- \geqslant 0$$

Pergandaan $T_\mu^- E(\Delta)$ dan $T_\lambda^+ E(\Delta)$ adalah juga positif. Sehingga dengan demikian maka diperoleh :

$$T_\mu E(\Delta) = T_\mu E_\mu E(\Delta) = -T_\mu^- E(\Delta) \leq 0$$

$$T_\lambda E(\Delta) = T_\lambda(I - E_\lambda)E(\Delta) = T_\lambda^+ E(\Delta) \geqslant 0$$

Hal ini mengakibatkan $TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta)$ dan $TE(\Delta) \geqslant \lambda E(\Delta)$ sehingga :

$$\lambda E(\Delta) \leq TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta) \;;\; E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$$

Dengan memisalkan $\mu \longrightarrow \lambda$ maka $E(\Delta)x \longrightarrow P(\lambda)x$ dimana

$P(\lambda)$ adalah terbatas dan hermitian. Karena $E(\Delta)$ adalah idempoten maka $P(\lambda)$ juga idempoten. Karena itu $P(\lambda)$ adalah suatu proyeksi. Juga $\lambda P(\lambda) = TP(\lambda)$ berdasarkan persamaan $T_\lambda^+ P(\lambda) = 0$ sehingga diperoleh :

$$T_\lambda^+ P(\lambda) = T_\lambda(I - E_\lambda)P(\lambda) = (I - E_\lambda)T_\lambda P(\lambda) = 0$$

Karena itu $T_\lambda^+ P(\lambda)x = 0$ untuk semua $x \in H$. Ini menunjukkan bahwa $P(\lambda)x \in N(T_\lambda^+)$ akibatnya diperoleh $E_\lambda P(\lambda)x = P(\lambda)x$ yaitu $E_\lambda P(\lambda) = P(\lambda)$.

Dalam hal lainnya jika dimisalkan $\mu \longrightarrow \lambda + 0$ sehingga diperoleh :

$$(I - E_\lambda)P(\lambda) = P(\lambda)$$

Bersamaan dengan $P(\lambda) = 0$ dengan mengingat $E(\Delta)x \longrightarrow P(\lambda)x$ ini membuktikan d. yaitu $\mathcal{E}$ kontinu dari ruas kanan. Jadi dengan demikian $\mathcal{E} = (E_\lambda)$ dalam teorema memenuhi semua ketentuan ketentuan dengan mana suatu famili spektral pada (m,M) didefenisikan.

Dari pembicaraan di atas didapat bahwa dengan suatu operator linier hermitian terbatas T pada suatu ruang hilbert kompleks H dapat diassosiasikan suatu famili spektral $\mathcal{E} = (E_\lambda)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dapat digunakan untuk memperoleh suatu representasi spektral dari T yaitu suatu - representasi integral yang berkenaan dengan $\mathcal{E}$ dan sedemikian hingga $\langle Tx, y\rangle$ disajikan disajikan dengan suatu integral riemann-stieltjes yaitu suatu integral dari x atas (a,b) terhadap w dan dinotasikan dengan : $\int_a^b x(t)\, dw(t)$.

Teorema 2.11.

Misalkan T : H $\longrightarrow$ H adalah operator linier hemitian pada suatu ruang Hilbert kompleks H maka :

a. T mempunyai representasi spektral

$$T = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda$$

dimana $\mathcal{E} = (E_\lambda)$ adalah famili spektral yang diassosiasikan dengan T dan untuk semua $x, y \in H$

$$Tx, y = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dw(\lambda), \quad w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$$

yang merupakan suatu integral Riemann Stieltjes.

b. Jika p suatu polinomial dalam λ dengan koefisien koefisien riel, sebut :

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_0$$

maka operator p(T) didefenisikan dengan :

$$p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1} T^{n-1} + ;\ldots\ldots\ldots + \alpha_0 I$$

mempunyai representasi spektral

$$p(T) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) \, dE_\lambda$$

dan untuk semua $x, y \in H$

$$\langle p(T)x, y \rangle = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) \, dw(\lambda), \quad w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$$

Bukti :

m-0 ditulis untuk menunjukkan bahwa harus diambil terhadap jumlah suatu kontribusi di $\lambda = m$ yang muncul jika $E_m \neq 0$

Jadi dengan menggunakan $a < m$, dapat ditulis :

$$\int_{a}^{M} \lambda dE_{\lambda} = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_{\lambda} = mE_m + \int_{m}^{M} \lambda dE_{\lambda}$$

Dengan cara yang sama,

$$\int_{a}^{M} p(\lambda)dE_{\lambda} = \int_{m=0}^{M} p(\lambda)dE_{\lambda} = p(m)E_m + \int_{m}^{M} p(\lambda)dE_{\lambda}$$

a. Dipilih suatu barisan (φn) yang merupakan partisi dari $(a,b]$ dimana $a < m$ dan $M < b$. Defenisi φ_n adalah suatu partisi dari $(a,b]$ kedalam interval-interval :

Δ_{nj} $(\lambda_{nj}, \mu_{nj}$ dengan panjang :

$l(\Delta_{nj}) = \mu_{nj} - \lambda_{nj}$ dan perlu dicatat bahwa $\lambda_{nj} = \lambda_{m,j+1}$

untuk $j = 1,\ldots\ldots,n-1$. Sekarang diasumsikan barisan(φ_n) sedemikian hingga :

$$\eta(\varphi_n) = \underset{j}{\text{maks}}\ l(\Delta_{nj}) \longrightarrow 0 \quad \text{jika } n \longrightarrow \infty$$

Dengan menggunakan rumus : $\lambda E(\Delta) \leq TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta)$ dan $E(\Delta) = E_{\mu} - E_{\lambda}$ untuk $\Delta = \Delta_{nj}$ maka :

$$\lambda_{nj} E(\Delta_{nj}) \leq TE(\Delta_{nj}) \leq \mu_{nj} E(\Delta_{nj}).$$

Dengan perjumlahan atas j dari 1 sampai n maka untuk setiap n diperoleh :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj} E(\Delta_{nj}) \leq \sum_{j=1}^{n} TE(\Delta_{nj}) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} E(\Delta_{nj})$$

Karena $\mu_{nj} = \lambda_{n,j+1}$ untuk $j = 1,\ldots\ldots,n-1$ dengan menggunakan b. dan c. dari teorema 2.10. diperoleh :

$$T \sum_{j=1}^{n} E(\Delta_{nj}) = T \sum_{j=1}^{n} (E_{\mu_{nj}} - E_{\lambda_{nj}}) = T(I - 0) = T$$

Rumus $\eta(\mathcal{P}_n) = \max_j l(\Delta_{nj}) \longrightarrow 0$ jika $n \longrightarrow \infty$

akan mengakibatkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat n sedemikian hingga $\eta(\mathcal{P}_n) < \varepsilon$ sehingga dengan menggunakan rumus diatas akan diperoleh :

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} E(\Delta_{nj}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj} E(\Delta_{nj}) = \sum_{j=1}^{n} (\mu_{nj} - \lambda_{nj})$$

$$E(\Delta_{nj}) < \varepsilon I$$

Darisini akan mengakibatkan untuk suatu $\varepsilon > 0$, terdapat N - sedemikian hingga $n > N$ dan setiap pemilihan dari $\hat{\lambda}_{nj} \in \Delta_{nj}$ diperoleh :

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj} E(\Delta_{nj}) \right\| < \varepsilon$$

Karena E_λ adalah konstan untuk $\lambda < m$ dan untuk $\lambda \geq M$ khususnyapemilihan dari $a < m$ dan $b > M$. Ini membuktikan :

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_0$$

Teorema akan dibuktikan untuk polinomial-polinomial yang di awali dengan $p(\lambda) = \lambda^r$ dimana $r \in N$. Untuk $k < \lambda \leq \mu < v$, $E_\lambda \leq E_\mu$ maka : $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ dan $(E_\lambda - E_k)(E_\mu - E_v)$ $= E_\lambda E_\mu - E_\lambda E_v - E_k E_\mu + E_k E_v = E_\lambda - E_\lambda - E_k + E_k = 0$

Ini menunjukkan bahwa $E(\Delta_{nj}) E(\Delta_{nk}) = 0$ untuk $j \neq k$.

Juga karena $E(\Delta_{nj})$ adalah suatu proyeksi $E(\Delta_{nj})^s = E(\Delta_{nj})$ untuk setiap s = 1,2,...... maka akibatnya akan diperoleh

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj} E(\Delta_{nj})\right]^r = \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj}{}^r E(\Delta_{nj})$$

Jika perjumlahan dalam rumus $\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj} E(\Delta_{nj}) \right\| < \varepsilon$ tertutup terhadap T dan $\left[\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj} E(\Delta_{nj})\right]^r = \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj}{}^r E(\Delta_{nj})$ pada ruas kiri tertutup terhadap T^r sebab pergandaan dari - operator-operator linier terbatas adalah kontinu. Karena itu dengan demikian untuk $\varepsilon > 0$ terdapat suatu N sedemikian hingga untuk semua $n \geq N$ maka berlaku :

$$\left\| T^r - \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj}{}^r E(\Delta_{nj}) \right\| < \varepsilon$$

Perlu diketahui bahwa jika suatu operator komutatif dengan T maka operator tersebut juga komutatif dengan :

$$p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1} T^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_0 I$$

Teorema 2.12.

Misalkan $T : H \longrightarrow H$ suatu operator linier helmitian terbatas pada ruang hilbert kompleks H dan f suatu fungsi bernilai riel kontinu pada $[m,M]$ dimana :

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad \text{dan} \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$$

maka f(T) mempunyai representasi spektral :

$$f(T) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, dE_\lambda$$

Dimana $\mathcal{E} = (E_\lambda)$ adalah famili spektral yang diasosiasikan dengan T dan untuk semua $x, y \in H$.

$$\langle f(T)x,x\rangle = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)\,dw(\lambda), \quad w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y)\rangle$$

Bukti :

Akan digunakan notasi yang sama seperti teorema 2.11 untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu polinomial p dengan koefisien-koefisien riel sedemikian hingga untuk semua $x \in [m, M]$

$$-\frac{\varepsilon}{3} \leq f(\lambda) - p(\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

dan kemudian :

$$\| f(T) - p(T) \| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Selanjutnya diketahui bahwa : $\sum E(\Delta_{nj}) = I$ dan dengan menggunakan rumus : $-\frac{\varepsilon}{3} \leq f(\lambda) - p(\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ untuk setiap partisi diperoleh :

$$-\frac{\varepsilon}{3} I \leq \sum_{j=1}^{n} \left[f(\lambda_{nj}) - p(\lambda_{nj}) \right] E(\Delta_{nj}) \leq \frac{\varepsilon}{3} I$$

Akhirnya karena $p(T) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda)\, dE_\lambda$ berdasarkan teorema 2.11. terdapat N sedemikian hingga untuk setiap $n > N$

diperoleh :

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} p(\lambda_{nj}) E(\Delta_{nj}) - p(T) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Dengan menggunakan ketidaksamaan ini sekarang dapat diestimasi norm dari selisih antara $f(T)$ dan perjumlahan dalam - Riemann- Stieltjes yang bersesuaian dengan integral dalam -

$$\langle p(T)x,y\rangle = \sum_{m-0}^{M} p(\lambda)\ dw(\lambda),\quad w(\lambda) = \langle E_\lambda x,y\rangle$$

Untuk $n > N$ dengan ketidaksamaan segitiga maka diperoleh :

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_{nj})E(\Delta_{nj}) - f(T) \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_{nj}) - p(\lambda_{nj})E(\Delta_{nj}) \right\|$$

$$+ \left\| \sum_{j=1}^{n} p(\lambda_{nj})E(\Delta_{nj}) - p(T) \right\| + \left\| p(T) - f(T) \right\| \leq \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ adalah sembarang maka :

$$f(T) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)dE_\lambda \quad \text{dan} \ \langle f(T)x,x\rangle = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)dw(\lambda)$$

adalah terbukti.

BAB III

P E M B A H A S A N

Pembahasan yang dilakukan dalam bab 3 ini adalah tentang representasi spektral dan hubungannya dengan operator unitary dalam ruang hilbert. Representasi spektral ini pada hakekatnya adalah pembuktian adanya hubungan antara teori - teorema spektal dengan operator unitary.
Hubungan yang terjadi dalam hal ini akan ditunjukkan dalam beberapa teorema-teorema.

Teorema 3.1.
Jika $U : H \longrightarrow H$ adalah suatu operator linier unitary pada ruang hilbert kompleks $H \neq \{0\}$, maka spektrum $\sigma(U)$ adalah suatu subset tertutup dari lingkaran satuan yaitu :

$$|\lambda| = 1 \quad \text{untuk setiap} \quad \lambda \in \sigma(U)$$

Bukti :

Dengan teorema 2.3.b, $\|U\| = 1$ oleh karena itu berdasarkan teorema 2.7 $|\sigma| \leq 1$ untuk semua $\lambda \in \sigma(U)$. Juga $0 \in \rho(U)$ karena untuk $\sigma = 0$ operator resolvent dari U adalah $U^{-1} = U^*$ Menurut teorema 2.3.c operator U^{-1} adalah operator unitary, sehingga $\|U^{-1}\| = 1$. Teorema 2.6 dengan T = U dan $\lambda_0 = 0$ mengakibatkan bahwa setiap λ yang memenuhi $|\lambda| < 1/\|U^{-1}\| = 1$ termuat dalam $\rho(U)$. Oleh karena itu spektrum dari U haruslah berada pada lingkaran satuan dan menurut teorema 2.5. lingkaran tersebut adalah tertutup, sehingga dapat didefenisikan f(T) untuk suatu operator T tertentu dan suatu fungsi kontinu f. Dengan cara yang sama maka deret tersebut dapat digunakan untuk mendefenisikan suatu operator unitary.

Teorema 3.2.

Misalkan $U : H \longrightarrow H$ suatu operator unitary pada ruang hilbert kompleks $H \neq \{0\}$. Maka terdapat suatu famili spektral $\mathcal{E} = (E_\theta)$ pada $[-\pi, \pi]$ sedemikian hingga :

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} dE_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta) dE_\theta$$

Secara umum untuk setiap fungsi kontinu f yang didefenisikan pada lingkaran satuan,

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, dE_\theta$$

dimana integral adalah dalam konvergensi operator seragam - dan untuk semua $x, y \in H$,

$$\langle f(U)x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) dw(\theta), \quad w(\theta) = \langle E_\theta x, y \rangle$$

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa untuk suatu operator unitary U terdapat suatu operator linier hermitian terbatas S dengan :

$\sigma(S)$ $[-\pi, \pi]$ sedemikian hingga

$$U = e^{iS} = \cos S + i \sin S$$

Eksistensi dari S telah dibuktikan seperti persamaan tersebut di atas yang diperoleh dari teorema 2.11. dan teorema - 2.12. Untuk lebih jelasnya maka langkah-langkah pembuktian yang dilakukan adalah sebagai berikut :

a. Dibuktikan bahwa U adalah unitary yaitu

$$U = e^{iS} = \cos S + i \sin S$$

b. Dapat dituliskan sebagai :

$$U = V + iW$$

dimana,

$V = \frac{1}{2}(U + U^*)$, $W = \frac{1}{2}i(U - U^*)$

dan dibuktikan bahwa V dan W adalah hermitian dan

$-1 \leq V \leq 1$, $-1 \leq W \leq 1$

c. Diselidiki beberapa ketentuan-ketentuan dari

$g(V) = \arc \cos V$ dan $A = \sin g(V)$

d. Akan dibuktikan bahwa operator S yang diinginkan adalah :

$S = (2P - I)(\arc \cos V)$

dimana P adalah proyeksi dari H pada $N(W - A)$

Selanjutnya pembuktiannya akan disajikan sebagai berikut :

a. Jika S adalah terbatas dan hermitian maka berdasarkan teorema 2.11. dan 2.12. maka cos S dan sin S juga hermitian dan operator-operator ini juga adalah komutatif. Ini mengakibatkan bahwa U adalah unitary oleh karena :

$$\begin{aligned} UU^* &= (\cos S + i \sin S)(\cos S - i \sin S) \\ &= (\cos S)^2 + (\sin S)^2 \\ &= (\cos^2 + \sin^2)(S) = 1 \end{aligned}$$

sehingga dengan cara yang sama maka $U^*U = I$

b. Kehermitianan dari V dan W dapat dipenuhi berdasarkan teorema 2.1, karena $UU^* = U^*U = 1$ diperoleh :

$VW = WV$ juga $\|U\| = \|U^*\|$ dan menurut teorema 2.3 maka mengakibatkan :

$\|V\| \leq 1$, $\|W\| \leq 1$

Selanjutnya,

$$|\langle Vx,x\rangle| \leq \|Vx\| \leq \|x\| \leq \|V\| \;\; \|x\|^2 \leq \langle x,x\rangle$$

yaitu $-\langle x,x\rangle \leq \langle Vx,x\rangle \leq \langle x,x\rangle$

Seterusnya dari;: $V = \frac{1}{2}(U + U^*)$ dan $W = \frac{1}{2}i(U - U^*)$

diperoleh :

$$V^2 + W^2 = 1$$

dengan perhitungan langsung

c. Perhatikan :

$$g(\lambda) = \arccos \lambda = \pi/2 - \arcsin \lambda$$
$$= \pi/2 - \lambda - 1/6\,\lambda^3$$

Deret maclaurin pada ruas kanan konvergen untuk $|\lambda| \leq 1$. Konvergensi di $\lambda = 1$ didasarkan pada kenyataan bahwa deret arc sin λ mempunyai koefisien-koefisien positif, karenanya suatu barisan monoton dari perjumlahan parsil Sn bila $\lambda > 0$, yang terbatas pada (0,1) karena $Sn(\lambda) <$ arc. sin $\lambda < \pi/2$ sehingga untuk setiap n tertentu didapat $Sn(\lambda) \longrightarrow Sn(1) \leq \pi/2$ sebagaimana $\lambda \longrightarrow 1$. Konvergensi di $\lambda = -1$ diperoleh langsung dari ketentuan di $\lambda = 1$, selanjutnya karena $\|V\| \leq 1$ yang mengakibatkan bahwa operator :

$$g(V) = \arccos V = \pi/2\,1 - V - 1/6\,V^3$$

adalah exist dan hermitian.

Sekarang defenisikan :

$$A = \sin g(V)$$

Ini merupakan suatu deret perpangkatan dalam V

Hal ini mengakibatkan bahwa A adalah hermitian dan komutatif dengan V dan $VW = WV$ mengakibatkan juga akan komutatif dengan W. Berdasarkan rumus $g(V)$ = arc cos V maka

$$\cos g(V) = V$$

sehingga :

$$V^2 + A^2 = (\cos^2 + \sin^2)(g(V)) = I$$

Dari $V^2 + W^2 = I$ akan menghasilkan $W^2 = A^2$ oleh karena itu dapatlah diaflikasikan dan disimpulkan bahwa :

$$W = (2P - I)A$$

Jika $Wx = 0$ mengakibatkan $Px = x$ dan P komutatif dengan V dan juga dengan $g(V)$ sebab kedua operator ini komutatif dengan $W - A$.

d. Sekarang defenisikan :

$$S = (2P - I)g(V) = g(V)(2P - I)$$

Jelas bahwa S adalah hermitian sehingga akan dibuktikan bahwa S memenuhi pada persamaan : $U = e^{iS} = \cos S + i \sin S$

Ambil $k = \lambda^2$ dan defenisikan h_1 dan h_2 dengan :

$$h_1(k) = \cos \lambda = 1 - \frac{1}{2!}\lambda^2 + - \ldots\ldots$$

$$h_2(k) = \sin \lambda = \lambda - \frac{1}{3!}\lambda^3 + - \ldots\ldots$$

Fungsi-fungsi ini exist untuk semua k oleh karena P adalah proyeksi maka $(2P - I)^2 = 4P - 4P + I = I$ sehingga diperoleh :

$$S^2 = (2P - I)^2 g(V)^2 = g(V)^2$$ dan oleh persamaan $\cos g(V) = V$ sehingga $\cos S = h_1(S^2) = h_1(g(V)^2) = \cos g(V) = V$ dan akan ditunjukkan bahwa $\sin S = W$ dan dengan menggunakan persamaan :

$$h_1(k) = \cos \gamma = 1 - \frac{1}{2!}\gamma^2 + - \ldots\ldots.$$

$$h_2(k) = \sin \gamma = \gamma - \frac{1}{3!}\gamma^3 + - \ldots\ldots.$$

dan persamaan :

$A = \sin g(V)$ serta $W = (2P - 1)A$ maka diperoleh

$$\sin S = Sh_2(S^2)$$

$$= (2P - I)\, g(V) h_2(g(V)^2)$$

$$= (2P - I) \sin g(V)$$

$$= (2P - I)A = W$$

Akan ditunjukkan bahwa $\sigma(S) \subset [-\pi,\pi]$ oleh karena $|\arc \cos \gamma| \leq \pi$ maka $\| S \| \leq \sigma$ dan karena S adalah hermitian serta terbatas sehingga $\sigma(S)$ adalah riel dan teorema 2.7. menunjukkan $\sigma(S) \subset [-\pi,\pi]$

Misalkan (E_θ) merupakan famili spektral dari S sehingga persamaan :

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, dE_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta)\, dE_\theta$$

dan persamaan :

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, dw(\theta)$$

diperoleh dari persamaan :

$$U = e^{iS} = \cos S + i \sin S$$

dan teorema 2.12. untuk operator linier hermitian terbatas. Secara khusus dapat diambil $-\pi$ sebagai limit bawah dari integrasi dalam persamaan diatas tanpa membatasi keumumannya dengan alasan sebagai berikut :

Jika diperoleh suatu famili spektral sebut misalnya (E'_θ) sedemikian hingga $E'_{-\pi} \neq 0$ akan dapat diambil $-\pi - 0$ sebagai batas bawah dari integrasi dalam integral-integral tersebut sehingga bagaimanapun dari E'_θ akan diperoleh hasil yang sama dengan menggunakan E_θ yang didefenisikan dengan :

$$E_\theta = \begin{cases} 0 & \text{jika } \theta = -\pi \\ E'_\theta - E'_{-\pi} & \text{jika } -\pi < \theta < \pi \\ I & \text{jika } \theta = \pi \end{cases}$$

E_θ kontinu di $\theta = -\pi$ sehingga batas bawah dari integrasi yaitu $-\pi$ dalam :

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} dE_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta) dE_\theta$$

serta

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, dE_\theta$$

jelas berlaku, sehingga dengan demikian maka berdasarkan pembuktian dari a sampai dengan d dapat diambil kesimpulan bahwa teori spektral dan operator unitary mempunyai hubungan atau famili dalam ruang hilbert.

B A B V

K E S I M P U L A N

Dari hasil pembahasan yang dilakukan pada Bab IV, maka dapat diambil suatu kesimpulan sebagai berikut :

Misalkan $U : H \longrightarrow H$ untuk operator unitary pada ruang hilbert kompleks $H \neq \{0\}$. Maka terdapat hubungan antara teori spektral dan operator unitary dalam ruang hilbert yaitu :

$$\mathcal{E} = (E_\theta) \text{ pada } [-\pi, \pi] \quad , \text{ sedemikian hingga :}$$

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \, dE_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta) \, dE_\theta$$

Secara umum untuk setiap fungsi kontinu f yang didefenisi - kan pada lingkaran satuan :

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \, dE_\theta$$

dimana integral adalah dalam konvergensi operator seragam dan untuk semua $x, y \in H$,

$$\langle f(U)x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \, dw(\theta)$$

dimana, $w(\theta) = \langle E_\theta x, y \rangle$

DAFTAR PUSTAKA

Hutahaean, E., Seri Matematika Fungsi Riil, Penerbit ITB. Bandung, 1990

Kreyszig, Erwin, Introduction Functional Analisys with - Applications, John Wiley & Sons, New York, 1998

Lipschutz, Seymour, Ph.D., Schaum's Outline of Theory and Problems of General Topology, McGraw-Hill Internatio- nal Book Company, Singapura, 1991

Yosida, Kosaku, Functional Anal sis (Sixth Edition) Springer-Verlag, Berlin, 1990.