ANALISA PENGENDALIAN MINIMUM SISTEM DALAM RUANG HILBERT

Karya Ilmiah

Oleh :

Drs. KHAIRUL SALEH
NIP: 131 675 581

FAKULTAS PERTANIAN
UNIVERSITAS MEDAN AREA
2003

ANALISA PENGENDALIAN MINIMUM SISTEM DALAM RUANG HILBERT

Karya Ilmiah

Oleh :

Drs. KHAIRUL SALEH
NIP: 131 675 581

FAKULTAS PERTANIAN
UNIVERSITAS MEDAN AREA
2003

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT berkat rahmat dan hidayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan karya ilmiah ini.

Karya ilmiah ini disusun sebagai salah satu syarat Tri Darma Perguruan Tinggi dan juga sebagai pengembangan ilmu pengetahuan khususnya pada bidang Matematika.

Penulis menyadari bahwa karya ilmiah ini baik dari segi isi dan cara penulisannya masih kurang dari sempurna, oleh sebab itu penulis sangat mengharapkan kritikan dan saran dari para pembaca demi kesempurnaan tulisan ini.

Akhirnya semoga tulisan ini dapat bermangaat bagi para pembaca dan bagi yang memerlukannya dan semoga Allah SWT selalu menyertai kita semua, Amin.

Medan, Maret 2003

Penulis,

Drs. Khairul Saleh

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Analisa fungsional merupakan bagian dari matematika murni sehingga tidak berdasarkan pengamatan dan pengalaman eksprimen tetapi merupakan konsep-konsep logika dan formalisasi dari model-model yang tidak lain adalah pendekatan terhadap pemecahan masalah kehidupan sehari-hari dan salah satu model itu adalah sistem.

Apabila suatu sistem diasumsikam Σ memiliki n keadaan interval $x_1,\ldots\ldots,x_n$, yang menjadi r sasaran pengaruh $u_1.\ldots\ldots,u_r$. dan menghasilkan sebanyak m hasil $y_1,\ldots\ldots,y_m$ sedemikian hingga dengan mendefanisikan norm minimum dan rumusannya didalam ruang hilbert maka aflikasinya didalam teori linear adalah untuk memodelkan prilaku suatu sistem. dan jika teori pengendalian tidak lain adalah pengeturan terencana suatu sistem apakah ada suatu strategi untuk menyetir suatu sitem dan bagaimana menentukan strategi untuk menyetirnya sedemikian hingga pengendalian suatu sistem tunggal (minimum).

Jadi pendekatan alamiah terhadap masalah di atas adalah dengan menggunakan pendekatan analisa fungsional dimana sifat penguraian tunggal dari ruang ilbert dan sifat pemetaan berank.

I.2. PERUMUSAN MASALAH

Suatu sistem adalah formalisasi model matematis dari teori linear di dalam ruang hilbert berdasarkan analisa - fungsional. Andaikan Σ adalah suatu sistem terkendali dengan ruang keadaan berdimensi hingga, $t_0 \in I$, $x(t_0) \in X$, $z \in X$ dimana I adalah himpunan waktu atau operator identitas dan X adalah ruang keadaan (ruang linier bernorm). Bila U adalah ruang hilbert $L^2(I)$ dari ruang pengendalian Jadi masalahnya adalah tentukan $u(t) \in U$ sedemikian hingga untuk beberapa $t_1 \in I$ diperoleh :

a. $x(t_1) = z$;

b. $\|u\|$ diminimumkan atas (t_0, t_1) dimana $\|\cdot\|$ mewakili norm atas $L^2(t_0, t_1)$.

I.3. MAKSUD DAN TUJUAN

Untuk memperlihatkan bagaimana menganalisa pengendalian minimum dari suatu sistem secara analisa fungsional.

I.4. MANFAAT PENELITIAN

Sebagai dasar analisa untuk menetapkan suatu pengendalian optimal (minimum) dari suatu sistem yang didefenisikan.

I.5. KERANGKA PEMIKIRAN

Sebelum memulai proses penyelesaian masalah, perlu dijelaskan bahwa semua aksioma yang digunakan yang memungkinkan dalam analisa ini merupakan suatu pendekatan abstrak - terhadap deskripsi masalah sistem secara menyeluruh dan diasumsikan semua masalah yang mungkin muncul dapat diselesaikan dengan mengubah pemodelan sistem dengan model linier.

Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan masalah di atas adalah :

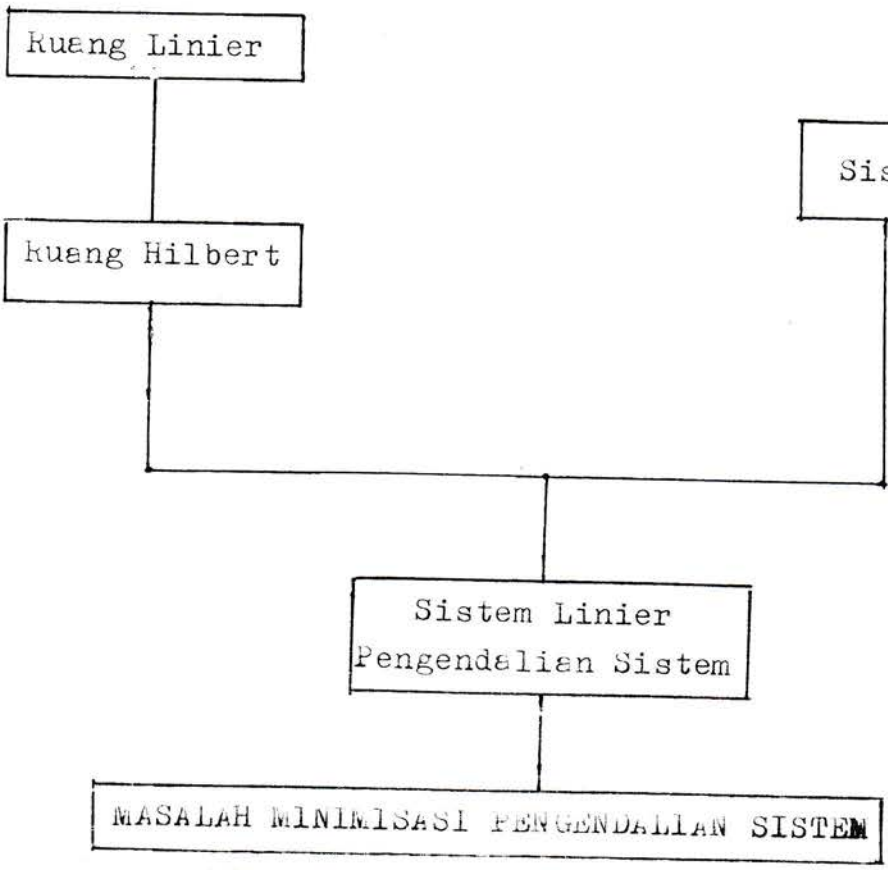
Langkah I : Menyajikan defenisi dan teori tentang pemetaan, ruang metriks, ruang linier, norm, barisan dan basis.

Langkah II : Menyajikan defenisi dan teori tentang ruang hilbert, penjelasannya.

Langkah III : Pendefenisian sistem dan sistem terkendali.

Langkah IV : Menentukan pengendalian sistem minimum dalam ruang hilbert.

Secara sederhana langkah-langkah di atas dapat gambarkan dalam diagram berikut ini :



I.6. TINJAUAN PUSTAKA

Setiap barisan konvergen di dalam suatu ruang metriks adalah suatu barisan Cauchy dan dinyatakan bahwa bila X suatu ruang perkalian dalam dan $A \neq \phi$ suatu himpunan bagian konveks yang sempurna dimana metriks diinduksikan dengan perkalian dalam maka $\forall x \in X$ terdapat dengan tunggal $y \in A$ sedemikian hingga :

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in A} \| x - \bar{y} \| = \| x - y \|$$

Suatu sistem linier Σ , dapat direpresentasikan oleh :

$\Sigma = \{ I, U, \Omega, x, y, \Phi, \eta \}$ dimana U, x, y masing-masing berkenaan dengan ruang masukan, ruang keadaan dan ruang hasil, Ω dinyatakan sebagai masukan-masukan yang dapat diterima , Φ merupakan pemindahan transisi keadaan yang memiliki sifat

$$\Phi(x(t_0), t_0, u(t), t_1) = x(t_1)$$

$t \in (t_0, t_1)$, $x(t_0) \in U$, $u(t) \in X$. $x(t_1) \in y$ dan η merupakan pemindahan hasil. Suatu sistem Σ dinyatakan terkendali pada t_0 jika diberikan t_0 maka terdapat $x(t_0)$ suatu $t, \tau \in I$, dan $t \geq \tau$ serta $u \in \Omega$ sedemikian hingga :

$$\Phi(x(t_0), t_0, u(\tau), t) = 0$$

BAB II

LANDASAN TEORI

II.1. DASAR TEORI

Andaikan x dan y himpunan-himpunan dan A x sembarang himpunan bagian. Suatu pemetaan T dari A kedalam y diperoleh dengan menghubungkan setiap x $\in$ A suatu y tunggal di dalam Y, ditulis y = Tx dan disebut bayangan dari x terhadap T. Himpunan A disebut domein dari defenisi T dan domein dari T ditulis D(T) dan ditulis :

$$T : D(T) \longrightarrow y$$

$$x \longrightarrow Tx$$

Range R(T) dari T adalah himpunan semua bayangan-bayangan yaitu :

$$R(T) = \{ y \in Y \mid y = Tx \text{ untuk beberapa } x \in D(T) \}.$$

Dalam kasus R(T) = y pemetaan T disebut pemetaan surjektif. Jika $\forall y \in R(T)$ terdapat suatu elemen tunggal y = Tx maka T dikatakan sebagai pemetaan injektif. Jika T sekaligus surjektif dan injektif maka T disebut pemetaan bijektif.

Defenisi 2.1.1.

Suatu ruang metriks adalah pasangan (X,d) dimana X adalah suatu himpunan dan d adalah metriks atas X yaitu suatu fungsi yang didefenisikan atas x $\in$ X sedemikian hingga $\forall$ x,y,z $\in$ X sehingga diperoleh :

1. d bernilai riil, berhingga dan tak negatif
2. d(x,y) = 0 jika dan hanya jika x = y

3. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetris)
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (ketidaksamaan segitiga)

Defenisi 2.1.2.

Suatu ruang linier (ruang vektor) melalui suatu field K adalah suatu himpunan tak kosong X dengan anggota x,y,....... (disebut vektor-vektor) bersama dengan dua operasi aljabar berikut :

1. Penjumlahan vektor-vektor
2. Penggandaan vektor-vektor dengan skalar atau elemen dari K.

Penjumlahan vektor dinyatakan sebagai hasil jumlah pasangan terurut (x,y) yaitu x + y sedemikian hingga sifat-sifat berikut berlaku :

1. $x + y = y + x$ (komutatif)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (assosiatif)

Dengan demikian terdapat suatu vektor 0 (vektor nol) dan setiap vektor memiliki -x (vektor invers) sehingga diperoleh :

$$x + 0 = x$$

$$x + (-x) = 0$$

Penggandaan vektor-vektor dengan skalar dinyatakan sebagai hasil kali (product) dari $\alpha \in K$ dan $x \in X$, yaitu αx sedemikian hingga untuk $\alpha, \beta \in K$ dan $x, y \in X$ diperoleh :

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$1x = x$$

dan

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

Selanjutnya penjumlahan vektor dapat dinyatakan sebagai suatu pemetaan $X \times X \longrightarrow X$, sedangkan penggandaan dengan skalar merupakan pemetaan $K \times X \longrightarrow X$.

Suatu fungsi atas suatu ruang linier ke ruang linier yang lain disebut linier jika memenuhi dua ketentuan berikut :

1. $f(\alpha y) = \alpha f(y)$, $\forall y \in Y$, α suatu bilangan riil
2. $f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2)$, $\forall y_1, y_2 \in Y$

Suatu fungsi f mempunyai linier secara lokal jika untuk beberapa konstanta positif M berlaku :

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$ sedemikian hingga

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leq M.$$

2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in R^2$ sedemikian hingga

$$\|x\| \leq M, \ \|\lambda x\| \leq M.$$

Andaikan X, Y ruang-ruang linier melalui skalar field yang sama maka suatu pemetaan linier T secara sederhana adalah suatu fungsi linier $T : X \longrightarrow Y$

Jika $A \subseteq X$ dari ruang linier maka A disebut ruang bagian - linier (linier subspace) dari X.

Defenisi 2.1.3.

Suatu norm atas ruang vektor X adalah suatu fungsi bernilai riil atas X yang memiliki nilai pada $x \in X$ ditulis $\|x\|$ dan memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketdaksamaan segitiga)

dimana x dan y sembarang vektor di dalam X dan α skalar - sembarang.

Ketidaktergantungan linier dan ketergantungan linier dari - suatu himpunan A dari vektor-vektor $x_1, \ldots, x_r$ $(r \geq 1)$ di- dalam suatu ruang vektor X dinyatakan oleh persamaan beri - kut :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_r x_r = 0 \qquad (2.1.1)$$

dimana :

$\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_r$ adalah skalar-skalar. Persamaan 2.1.1 jelas berlaku untuk $\alpha_1, = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_r = 0$

Bila hal ini hanya merupakan r skalar dimana 2.1.1. berlaku maka himpunan A dikatakan bebas linier. Jadi A disebut ter- gantung jika A tidak bebas linier yaitu jika 2.1.1 berlaku untuk semua skalar yang tidak semua nol.

Suatu ruang vektor X dikatakan berdimensi hingga jika terdapat suatu bilangan bulat positif n sedemikian hingga X me - ngandung suatu himpunan yang bebas linier dari n vektor.

...ngkan himpunan sembarang dari $n + 1$ atau lebih vektor - ...ri X secara linier tidak bebas n disebut dimensi atas X ...tulis $n = \dim. X$.

...a $\dim X = n$, n vektor yang secara linier bebas dari X di...but basis untuk X (basis di dalam X). Jika $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ...lah suatu basis untuk X. Maka setiap $x \in X$ memiliki sua... representasi tunggal sebagai kombinasi linier dari vek - ...r-vektor basis yaitu :

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots\ldots + \alpha_n e_n.$$

...isalnya suatu basis untuk R^n adalah

$$e_1 = (1,0,0,\ldots\ldots,0),$$

$$e_2 = (0,1,0,\ldots\ldots,0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_n = (0,0,0,\ldots\ldots,0).$$

...n ini seringkali dinayatakan sebagai basis kanonik untuk ... . Suatu himpunan bagian E dari garis riil R adalah terba...s di atas jika E memiliki batas atas yaitu jika terdapat ... $\in R$ sedemikian hingga $x \leq b$ untuk semua $x \in E$. Maka jika ... $= 0$ terdapat suremum dari E (batas atas terkecil dari E) ...tulis sup. E yaitu batas atas dari E sedemikian hingga , ...p. $E \leq b$ untuk setiap batas atas b dari E.juga

$$\sup C \leq \sup E$$

...tuk setiap himpunan bagian tak kosong $C \subset E$.

...ngan cara yang sama, E terbatas di bawah jika E memiliki - ...tu batas bawah yakni jika terdapat suatu $a \in R$ sedemikian hingga $x \geqslant a$ untuk semua $x \in E$. Maka jika $E \neq 0$, terdapat infimum dari E (batas bawah terbesar dari E) ditulis inf E, yaitu batas bawah dari E sedemikian hingga inf $E \geqslant a$ untuk setiap batas bawah a untuk E juga :

$$\inf C \geqslant \inf E$$

untuk setiap himpunan bagian tak kosong $C \subset E$.

E terbatas jika E sekaligus terbatas di atas dan di bawah maka jika $E \neq 0$ sehingga inf $E \leqq$ sup E.

Jika untuk suatu pemetaan $T : D(T) \longrightarrow R$ dimana range $R(T)$ diasumsikan tak kosong dan terbatas di atas maka supremumnya ditulis dengan :

$$\sup_{x \in D(T)} Tx,$$

dan jika $R(T)$ terbatas di bawah, infimumnya ditulis dengan

$$\inf_{x \in D(T)} Tx$$

Defenisi 2.1.4.

Suatu barisan (x_n) di dalam suatu ruang metrik $X = (X, d)$ dinyatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sedemikian hingga :

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

x disebut limit dari (x_n) dan ditulis :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

atau lebih sederhana $x_n \longrightarrow x$. Selanjutnya (x_n) disebut konvergen terhadap x atau memiliki limit x jika (x_n) tidak konvergen disebut divergen.

Defenisi 2.1.5.

Suatu barisan (x_n) di dalam suatu ruang metriks, $X = (X,d)$ dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $N = N(\varepsilon)$ sedemikian hingga

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon \quad \text{untuk setiap } m,n > N.$$

Ruang X dikatakan sempurna jika setiap barisan Cauchy di dalam X konvergen yaitu memiliki limit suatu elemen dari X.

Teorema 2.1.6.

Setiap barisan konvergen di dalam suatu ruang metriks adalah suatu barisan Cauchy.

Bukti :

Jika $x_n \longrightarrow x$, maka $\forall\varepsilon > 0$ terdapat suatu $N = N(\varepsilon)$ sedemikian hingga :

$$d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$$

Berdasarkan ketidaksamaan segitiga diperoleh untuk $m,n > N$.

$$d(x_m.x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ini memperlihatkan bahwa (x_n) adalah Cauchy.

Suatu titik $x_o \in X$ dan suatu bilangan riil $r > 0$, didefenisikan tiga jenis himpunan :

1. $B(x_o,r) = \{x \in X \mid d(x,x_o) < r\}$ (Bola buka)
2. $B(x_o,r) = \{x \in X \mid d(x,x_o) \leq r\}$ (Bola tertutup)
3. $S(x_o,r) = \{x \in X \mid d(x,x_o) = r\}$ (Bulatan)

dalam ketiga kasus di atas, x_o disebut pusat dan r disebut jari-jari. Untuk r = 1 maka $B(x_o,r)$ disebut bola satuan tutup, secara sederhana ditulis B.

tu himpunan bagian A dari suatu ruang metrik X dikatakan buka jika mengandung bola pada setiap titiknya. Suatu punan bagian B dari X dikatakan tertutup jika komplemen di dalam X adalah buka yaitu : $B^c = X - B$ terbuka.

tu bola buka $B(x_o, \varepsilon)$ berjari-jari ε disebut ε- lingkungan dari x_o. Lingkungan dari x_o berarti sembarang himpunan bagian dari X yang mengandung suatu ε- lingkungan dari x_o. Andaikan A himpunan bagian dari suatu ruang metrik X suatu titik x_o dari X (yang boleh berada dalam A maupun tidak) disebut titik kumpul (accumulation point) dari (titik limit dari A) jika setiap lingkungan dari x_o mengandung paling sedikit satu titik $y \in A$ berbeda dari x_o.

punan yang terdiri dari titik dari A dan titik-titik kumpul dari A disebut closure (penutup) dari A dan ditulis dengan $\bar{A}$.

rema 2.1.7.

ikan A suatu himpunan bagian tak kosong dari suatu ruang metrik (X,d) dan $\bar{A}$ penutupnya seperti dinyatakan di atas maka :

$x \in \bar{A}$ jika dan hanya jika terdapat suatu barisan (x_n) di dalam A sedemikian hingga $x_n \longrightarrow x$.

2. A tertutup jika dan hanya jika terdapat suatu barisan (x_n) $\in$ A, $x_n \longrightarrow x$ yang berarti bahwa $x \in A$.

Bukti :

1. Andaikan $x \in \bar{A}$ jika $x \in A$, suatu barisan dari ($x_1, x_2, ..$) jika $x \in A$ yang merupakan titik kumpul dari A. Akibatnya untuk setiap n = 1,2,.... bola B(x,1/n) mengandung suatu $x_n \in A$ dan $x_n \longrightarrow x$ sebab $1/n \longrightarrow 0$ sama seperti $n \longrightarrow \infty$. Sebaliknya jika (x_n) ada di dalam A dan $x_n \longrightarrow x$, maka $x \in A$ atau setiap lingkungan dari x mengandung titik $x_n \neq x$, sehingga x adalah suatu titik kumpul dari A akibatnya $x \in \bar{A}$ berdasarkan defenisi penutup.
2. A tertutup jika dan hanya jika $A = \bar{A}$ sehingga bagian 2 ini berdasarkan pembuktian dari bagian 1.

Teorema 2.1.8.

Suatu ruang bagian A dari suatu ruang metrik sempurna X adalah sempurna dengan sendirinya jika dan hanya jika himpunan A tertutup di dalam X.

Bukti :

Andaikan A sempurna berdasarkan teorema 2.1.7. 1. untuk setiap $x \in \bar{A}$ terdapat suatu barisan (x_n) di dalam A yang konvergen terhadap x. Akibatnya (x_n) adalah Cauchy berdasarkan teorema 2,1,6. Dengan demikian $x \in A$ hal ini membuktikan bahwa A tertutup sebab $x \in \bar{A}$ adalah sembarang.

Sebaliknya andaikan A tertutup dan (x_n) Cauchy di dalam A. Maka $x_n \longrightarrow x \in X$ yang berarti $x \in \bar{A}$ oleh teorema 2.1.7 bagian pertama dan $x \in A$ diperoleh $A = \bar{A}$ berdasarkan asumsi. Akibatnya barisan Cauchy sembarang (x_n) konvergen di dalam A yang membuktikan kesempurnaan dari A. Dalam kasus-kasus - ruang-ruang vektor dan khususnya ruang bernorm suatu pemetaan disebut operator dan sering kali jika pemetaan linier T memetakan X kedalam dirinyasendiri $T : X \longrightarrow X$ maka T disebut operator linier.

Defenisi 2.1.9.

Suatu operator linier T adalah suatu operator sedemikian - hingga :

1. Domein D(T) dari T adalah ruang vektor dan Range R(T) terletak di dalam suatu ruang vektor melalui field yang sama.
2. Untuk semua $x, y \in D(T)$ dan skalar-skalar α, $T(x+y) = Tx + Ty$ dan $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

Suatu operator linier $I_x : X \longrightarrow X$ didefenisikan oleh : $I_x x = x$ untuk semua $x \in X$, secara sederhana ditulis I untuk I_x sehingga $I_x = x$. Andaikan X dan Y ruang-ruang bernorm dan $T : D(T) \longrightarrow Y$ suatu operator linier, dimana $D(T) \subset X$. Operator T dikatakan terbatas jika terdapat suatu bilangan real c sedemikian hingga untuk semua $x \in D(T)$ dipenuhi :

$$\|Tx\| \leq c \, \|x\| .$$

Suatu ruang null (dalam hal lain disebut kernel untuk teori persamaan integral) dari T adalah himpunan semua $x \in D(T)$ sedemikian hingga $Tx = 0$.

Defenisi 2.1.10.

Andaikan S suatu pemetaan linier dari U ke X; U dan X adalah ruang-ruang bernorm sembarang, $S : U \longrightarrow X$ jika range S adalah berdimensi hingga sehingga S dikatakan sebagai pemetaan berank hingga atau jika range memiliki dimensi n maka rank dari pemetaan disebut sama dengan n.

II.2. RUANG HILBERT

Di dalam aplikasi matematika sering dipergunakan perhitungan $|x| \cdot |y| \cos \theta$ dimana x,y adalah dua vektor dan θ sudut antara x dan y. Secara umum konsep ini merupakan perkalian dalam (inner product).

Defenisi 2.2.1.

Suatu perkalian dalam atas ruang linier X ditulis $\langle x,y \rangle$ $\forall x,y \in X$ adalah pemetaan X x X kedalam field skalar K dari X sedemikian hingga untuk semua vektor-vektor x,y,z dan skalar α diperoleh :

1. $\langle x,y \rangle > 0 \iff x \neq 0$
2. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$
3. $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
4. $\langle x + y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

dan X disebut ruang perkalian dalam (inner product space).

Di dalam ruang berdimensi dua R^2, jika $x = (\xi_1, \xi_2)$ dan $y = (\theta_1, \theta_2)$ dua titik semberang di dalam R^2. Rumus jarak antara x dan y atau panjang penggal garis yang menghubung ujungnya adalah :

$$\sqrt{(\xi_1 - \theta_1)^2 + (\xi_2 - \theta_2)^2}$$

Dan perkalian dalam atas X menyatakan suatu norm atas X, yaitu :

$$\| x \| = \sqrt{\langle x,y \rangle}$$

dimana suatu metrik atas X dinyatakan dengan :

$$d(x,y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x - y, y - x \rangle}$$

Jadi :

$$\| x \| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

untuk jarak dari x ketitik O = (0,0) dan jarak antara x dan y menjadi $\| x - y \|$. Pendang α sudut antara penggal garis dari O ke y dengan absis positif yang sama. Sudut antara dua vektor x dan y adalah $\alpha - \beta$, sehingga kosinusnya adalah :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$= \frac{\xi_1 \theta_1 + \xi_2 \theta_2}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

Akibatnya untuk setiap pasangan vektor x dan y diberikan nilai $\xi_1\theta_1 + \xi_2\theta_2 = \langle x,y \rangle$, sehingga jelaslah bahwa :

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\langle x,y \rangle}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

Defenisi 2.2.2.

Suatu elemen x dari suatu ruang perkalian dalam x dikata-ortthogonal terhadap suatu elemen $y \in X$, ditulis $x \perp y$, jika $\langle x,y \rangle = 0$. Dengan perkataan lain untuk $A,B \subseteq X$ ditulis $x \perp A$ jika $x \perp a$ $\forall a \in A$ dan $A \perp B$ jika $a \perp b$ $\forall a \in A$ dan $\forall b \in B$. Andaikan $\{x_i / i = 1,2,3,\ldots,n\}$ himpunan elemen-elemen di dalam suatu ruang perkalian dalam X yang memenuhi $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,3,\ldots,n$ adalah himpunan elemen-elemen orthogonal. Misalkan $e_i = x_i / \| x_i \|$, maka himpunan $\{e_i\}$ disebut himpunan orthogonal.

Bila X memiliki dimensi berhingga, andaikan himpunan bagian E ada maka disebut suatu basis untuk X sedemikian hingga setiap elemen dari X dapat ditulis dengan tunggal sebagai kombimasi linier berhingga elemen-elemen dari E.

Contoh : $E = \{e_i / i = 1,2,3,\ldots,n\}$ disebut basis Schauder jika setiap elemen dari $x \in X$ dapat dinyatakan secara tunggal dengan suatu hasil jumlah (SUM) yaitu $x = \sum \alpha_i e_i$, dimana $\alpha_i \in K$.

Defenisi 2.2.3.

Barisan $\{e_i / i = 1,2,3,\ldots,n\}$ didalam suatu basis Schauder untuk X yang juga merupakan himpunan orthogonal disebut basis orthogonal dari X.

Defenisi 2.2.4.

Suatu ruang hilbert adalah sustu ruang perkalian dalam sempurna dimana metrik dinyatakan oleh perkalian dalam.

Ruang Euclidean R^n :

Ruang R^n adalah suatu ruang hilbert dengan perkalian dalam didefenisikan oleh :

$$\langle x,y \rangle = \xi_1 \theta_1 + \ldots + \xi_n \theta_n$$

dimana $x = (\xi_j) = (\xi_1, \ldots, \xi_n$ dan $y = (\theta_j) = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$

Dengan demikian diperoleh :

$$\| x \| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$$
$$= (\xi^2_1 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

dan dari kenyataan ini, metrik euclidean didefenisikan de - ngan :

$$d(x,y) = \| x - y \| = \langle x-y, x-y \rangle^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[(\xi_1 - \theta_1)^2 + \ldots + (\xi_n - \theta_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ruang $L^2(a,b)$

Ruang vektor dari semua fungsi-fungsi bernilai riil kontinu atas (a,b) membentuk suatu ruang bernorm X dengan norm didefenisikan oleh :

$$\| x \| = \left[\int_a^b x(t)^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

dapat diperoleh dari perkalian yang didefenisikan oleh :

$$x,y = \int_a^b x(t)y(t) \, dt$$

... dalam suatu ruang metrik X, jarak δ dari suatu elemen - ... $\in$ X didefenisikan menjadi :

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in A} d(x - \bar{y})$$

... dalam ruang bernorm ini menjadi :

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in A} \| x - \bar{y} \|$$

...ggal garis (segment) yang menghubungkan dua elemen x dan ... yang diberikan dari sustu ruang vektor X didefenisikan menjadi himpunan semua z $\in$ X berbentuk :

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y,\ \alpha \in R,\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

...atu himpunan bagian A dari X dikatakan konveks jika untuk semua x,y $\in$ A dihubungkan oleh penggal garis dikandung didalam A. Untuk suatu ruang hilbert X dan x,y dua elemen dari X maka :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x,x \rangle + \langle y,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \overline{\langle x,y \rangle} + \langle x,y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

...ngan cara yang sama :

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\langle x,y \rangle} + \|y\|^2$$

...hingga diperoleh :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\| = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Teorema 2.2.5.

Andaikan X suatu ruang perkalian dalam dan $A \neq \emptyset$ suatu himpunan bagian konveks yang sempurna (dimana matriks diinduksikan dengan perkalian dalam). Maka $\forall x \in X$ terdapat dengan tunggal $y \in A$ sedemikian hingga :

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in A} \|x - \bar{y}\| = \|x - y\|$$

Bukti :

a. Eksistensi : berdasarkan defenisi suatu himpunan terdapat suatu barisan (y_n) di dalam A sedemikian hingga :

$$\delta_n \longmapsto \delta \text{; dimana } \delta_n = \|x - y_n\|$$

Diperlihatkan bahwa (y_n) adalah cauchy $y_n - x = v_n$ diperoleh $\|v_n\| = \delta_n$ dan

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\|$$
$$= 2\,\|\tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|$$
$$\geqslant 2\delta$$

Sebab A adalah konveks sehingga $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in A$.

Selanjutnya diperoleh $y_n - y_m = v_n - v_m$

Akibat hukum jajaran genjang ,

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2$$
$$= -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2$$
$$\leqq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^{\,2} + \delta_m^{\,2})$$

Defenisi (2.2.2) menunjukkan bahwa (y_n) Cauchy, akibatnya A adalah sempurna dan (y_n) konvergen terhadap y yaitu : $y_n \longrightarrow y \in A$. Karena $y \in A$ maka diperoleh $\|x - y\| \geq \delta$.

Juga berdasarkan (2.2.2) maka :

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\|$$

$$= \delta_n + \|y_n - y\| \longmapsto \delta$$

Ini memperlihatkan bahwa $\|x - y\| = \delta$

b. Ketunggalan : diasumsikan bahwa $y \in A$ dan $y_o \in A$ dimana keduanya memenuhi :

$$\|x - y\| = \delta \quad \text{dan} \quad \|x - y_o\| = \delta$$

dan diperoleh $y_o = y$. Berdasarkan hukum jajaran genjang

$$\|y - y_o\|^2 = \|(y - x) - (y_o - x)\|^2$$

$$= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_o - x\|^2 - \|(y-x) + (y_o - x)\|^2.$$

$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\|\tfrac{1}{2}(y + y_o) - x\|^2.$$

Dari sisi kanan, $\frac{1}{2}(y + y_o) \in A$, sehingga :

$$\|\tfrac{1}{2}(y + y_o) - x\| \geq \delta$$

Ini berarti sisi sebelah kanan lebih kecil atau sama dengan : $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$. Akibatnya diperoleh ketidaksamaan $\|y - y_o\| \leq 0$. Jelaslah $\|y - y_o\| \geq 0$ sehingga diperoleh $y_o = y$.

Lemma 2.2.6.

Dalam teorema 2.2.5, pandang A suatu ruang bagian sempurna dari y dan $x \in X$. Maka $z = x - y$ adalah orthogonal dengan y.

Bukti :

Jika $z \perp y$ tidak benar akan terdapat suatu $y_i \in y$ sedemikian hingga :

$$\langle z, y_i \rangle = \beta \neq 0$$

jelaslah, $y_i \neq 0$ sedangkan dalam hal lain $\langle z, y_i \rangle = 0$ oleh - karena itu untuk sembarang skalar α ,

$$\begin{aligned} \| z - \alpha y_i \|^2 &= \langle z - \alpha y_i , z - \alpha y_i \rangle \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, y_i \rangle - \alpha [\langle y_i, z \rangle - \bar{\alpha} \langle y_i, y_i \rangle] \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \beta - \alpha [\bar{\beta} - \bar{\alpha} \langle y_i, y_i \rangle] \end{aligned}$$

Pernyataan di dalam tanda kurung $[\ldots]$ adalah nol jika dipilih :

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_i, y_i \rangle}$$

Dari persamaan :

$$= \inf_{\bar{y} \in A} \| x - \bar{y} \| = \| x - y \|$$

diperoleh $\| z \| = \| x - y \| = \delta$, sehingga persamaan di atas menghasilkan :

$$\| z - \alpha y_i \|^2 = \| z \|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_i, y_i \rangle} < \delta^2$$

Tetapi ini tidak mungkin sebab diperoleh :

$z - \alpha y_1 = x - y_2$ dimana $y_2 = y + \alpha y_1 \in y$, sehingga $\|\xi - \alpha y_1\| \geq \delta$ berdasarkan defenisi dari δ akibatnya diperoleh (2.2.3) tidak berlaku dan lemma terbukti.

Representasi dari suatu ruang hilbert dinyatakan sebagai suatu direct sum yang secara khusus sederhana dan pantas sebab hal ini menggunakan faedah sifat orthogonal.

Defenisi 2.2.7.

Suatu ruang vektor X dikatakan direct sum dari dua ruang bagian A dan B dari X, ditulis $X = A \oplus B$, jika setiap $x \in X$ memiliki representasi tunggal :

$$x = a + b,\ a \in A,\ b \in B.$$

Maka B disebut komplement aljabar dari A di dalam X dan sebaliknya, dan A, B disebut pasangan komplemen dari ruang-ruang hilbert H. Maka :

$$H = A \oplus B, \quad B = A^{\perp}$$

Bukti :

Karena H sempurna dan A tertutup, A sempurna berdasarkan teorema (2.1.8). Akibatnya A adalah konveks. Teorema 2.2.5 dan teorema 2.2.6 menjelaskan bahwa untuk setiap $x \in H$ terdapat $a \in A$ sedemikian hingga :

$$x = a + b,\ b \in B = A^{\perp}$$

Untuk membuktikan sifat tunggalnya diasumsikan bahwa :

$$x = a + b = a_i = b_i$$

Akibatnya $P/_A$ adalah operator identitas atas A. Dan untuk $B = A^I$ dihasilkan lemma berikut.

Lemma 2.2.7.

Komplemen orthogonal A^I dari suatu ruang bagian tertutup A dari suatu ruang hilbert H adalah ruang null N(P) dari proyeksi orthogonal P dari H pada A.

Andaikan X suatu ruang linier bernorm dan pandang himpunan semua fungsi-fungsi linier terbatas $f_1, f_2, \ldots\ldots X \longrightarrow K$ didefenisikan atas X. Secara linier diperoleh bahwa hasil jumlah dua fungsi linier sembarang juga merupakan fungsi linier dan untuk suatu pergandaan skalar dari suatu fungsi linier adalah juga fungsi linier. Selanjutnya himpunan semua fungsi-fungsi terbatas linier atas X adalah ruang linier itu sendiri dimana hal ini disebut ruang dual dari X.

Defenisi 2.2.8.

Suatu ruang dual bernorm dari X, ditulis X^* adalah suatu ruang dual yang didefenisikan atasnya suatu norm.

Andaikan x^* elemen dari X^* maka norm didefenisikan sebagai berikut :

$$\| x^* \| = \sup_{x \in B} \{ | x^*(x) | \}$$

dimana B adalah bola satuan tertutup dari X

Teorema 2.2.6.

Andaikan S suatu pemetaan linier antara ruang hilbert U dan suatu ruang berdimensi hingga X, $S : U \longmapsto X$.

dimana $a, a_1 \in A$ dan $b, b_1 \in B$. Maka $a - a_1 = b_1 - b$. Akibatnya $a - a_1 \in A$ sedangkan $b_1 - b \in B = A^I$, diperlihatkan bahwa $a - a_1 \in A \cap A^I = \{0\}$. Ini berarti $a = a_1$ akibatnya juga $b = b_1$.

a di dalam $x = a + b$, $b \in B = A^I$ disebut proyeksi orthogonal dari x atas A, atau singkatnya proyeksi x atas A. Misalnya $H = R^2$ dan proyeksikan sembarang titik $x = (\xi_1, \xi_2)$ atas sumbu ξ_1 yang memerankan aturan dari A dimana proyeksinya adalah $a = (\xi_1, 0)$.

Persamaan $x = a + b$, $b \in B = A^I$ mendefenisikan suatu pemetaan :

$$P : H \longmapsto A$$

$$x \longmapsto a = Px$$

P disebut operator proyeksi (proyeksi) dari H pada A. Jelasnya P adalah operator linier terbatas P memetakan :

H pada A

A pada dirinya sendiri

$B = A^I$ pada $\{0\}$

dan P disebut idempotent bila

$$P^2 = P$$

sebab untuk setiap $x \in H$,

$$P^2x = P(Px)$$
$$= Px$$

Maka terdapat suatu ruang berdimensi hingga $A \subset U$ sedemikian hingga S dibatasi terdapat A merupakan suatu pemetaan - injektif.

Bukti :

Andaikan $\{e_i\}$, i = 1,....,n, suatu basis untuk range $S \subset X$ diberikan sembarang $u \in U$, Su dapat dinyatakan :

$Su = \sum \alpha_i e_i$, i = 1,....,n dimana setiap dari α_i dapat dinyatakan :

$$\alpha_i = \langle f_i, u \rangle \quad , f_i \in U^* = U$$

Maka

$$Su = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, u \rangle . e_i$$

e_i secara linier bebas dan menghasilkan suatu ruang bagian berdimensi n, misalkan $M \subset U$. Akibatnya $U = M \oplus M^{I}$ dari ruang hilbert. Andaikan $u \in M^{I}$ maka $\langle f_i, u \rangle = \alpha_i = 0$.

Jadi $M^{I} \subset Ns$ (Ruang null)

Andaikan $u \in Ns$ maka :

$$Su = 0 = \sum \langle f_i, u \rangle e_i$$

Karena itu e_i bebas, setiap $\langle f_i, u \rangle = 0$, i = 1,..... n, sehingga $M^{I} = Ns$. S memetakan M bijektif terhadap range S dan akibatnya S dibatasi terhadap M adalah suatu pemetaan injektif ke dalam X.

II.3. TEORI SISTEM

Andaikan I suatu garis riil R. Andaikan U,X,Y ruang - ruang linier bernorm dari fungsi-fungsi atas I. Misalkan Ω himpunan bagian tak kosong dari U, $\Phi : X \times I \times \Omega \times I \longrightarrow X$ suatu pemetaan linier dan $\eta : X \times I \longrightarrow Y$ suatu pemetaan linier.

Defenisi 2.3.1.

Suatu sistem linier ditulis dapat direpresentasikan oleh

$$\Sigma = \{I, U, \Omega, X, Y, \Phi, \eta\}$$

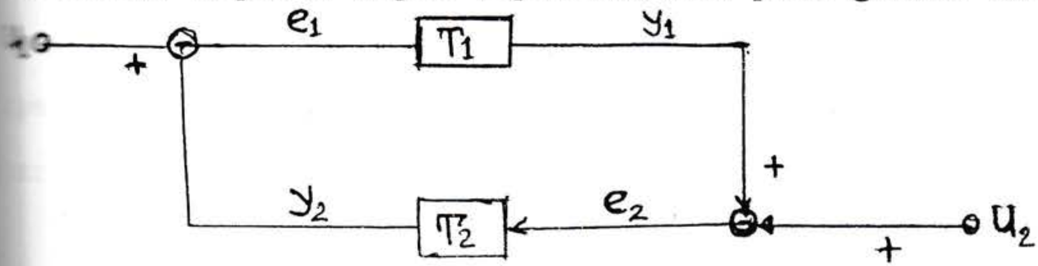
dimana U,X,Y masing-masing berkenaan dengan ruang masukan, ruang keadaan, ruang hasil dan Ω dinyatakan sebagai masukan masukan yang dapat diterima serta Φ merupakan pemindahan - transisi keadaan yang memiliki sifat :

$$\Phi(X(t_0), t_0, u(t), t_1) = X(t_1)$$

$t \in (t_0, t_1)$, $x(t_0) \in U$, $u(t) \in X$, $x(t_1) \in Y$ dan η merupakan pemindahan hasil.

Untuk selanjutnya suatu sistem linier disebut saja sistem, dimana $x(t_1)$ disebut keadaan netral dan untuk $x(t_1) = 0$, $u(t) = 0$ artinya sistem dalam keadaan awal (biasa).

Untuk pengertian yang lebih sederhana andaikan u_1, u_2 sebagai masukan, y_1, y_2 sebagai hasil dan e_1, e_2 sebagai galat (keadaan) seperti dapat diperlihatkan pada gambar dibawah :



dimana : u_i, y_i dan e_i adalah fungsi-fungsi waktu dan biasanya didefenisikan untuk $t \geq 0$ atau untuk $t \in Z_+$ yang dinyatakan dalam nilai-nilai riil atau didalam suatu ruang hilbert (bernorm). Diberikan beberapa asumsi atas dua operator T_1 dan T_2 yaitu jika u_1, u_2 termasuk kebeberapa kelas maka e_1, e_2 dan y_1, y_2 juga termasuk kedalam kelas yang sama. Persamaan-persamaan sistem di atas adalah :

$$u_1 = e_1 + T_2 e_2$$

$$u_2 = e_2 - T_1 e_1$$

T_1 dan T_2 masing-masing merupakan suatu ohperator yang melakukan tindakan atas masukannya masing-masing e_1 dan e_2 untuk menghasilkan masing-masing y_1 dan y_2. Persamaan : $u_1 = e_1 + T_2 e_2$ dan $u_2 = e_2 - T_1 e_1$ ditafsirkan sebagai pengendalian seperti diperlihatkan pada gambar di atas. Dan pengembangan terhadap u_i, $i = 1,2,3,\ldots n$ mengambil nilai-nilai didalam R^2 dengan komponen-komponen $(u_i)_1$ dan $(u_i)_2$. Operator T_1 adalah suatu jenis operator gangguan yang menjalankan arus dan membagi voltase. Operator T_2 merupakan suatu jenis operator penerimaan yang menjalankan voltase dan membagi-bagi arus. Atau dengan kata lain persamaan $u_1 = e_1 + T_2 e_2$ menyatakan hukum arus kirchoff dan persamaan $u_2 = e_2 - T_1 e_1$ menyatakan hukum voltase kirchoff. Jadi suatu sistem dapat dinyatakan sebagai penggabungan beberapa komponen yang saling berkaitan dan saling bekerja sama.

Defenisi 2.3.2.

Suatu sistem Σ dinyatakan terkendali pada t_0 jika dan hanya jika diberikan t_0 dan $x(t_0)$ terdapat suatu $t, \tau \in I$, $t \geq \tau$ dan $u \in \Omega$ sedemikian hingga

$$\Phi(x(t_0), t_0, u(\tau), t) = 0$$

Dengan kata lain, suatu keadaan terkemdali jika dan hanya jika hal itu dapat ditransformasikan ke keadaan netral di dalam waktu berhingga dengan menggunakan beberapa masukan yang diperkenalkan fungsi u.

BAB III

PEMBAHASAN

Berdasarkan defenisi pengendalian dan asumsi masalah pengendalian, terdapat u(t) untuk selanjutnya ditulis u, yang didefenisikan atas (t_0, t_1) sedemikian hingga $x(t_1) = z$. Bilamana t_0, t_1 tertentu dan demikian juga $x(t_0)$ dengan pendefenisian pemetaan berikut :

$$\emptyset : X \times I \times U \times X \times I \longmapsto X$$

dengan pemetaan S,

$$S : U \times I \longmapsto X$$

dengan demikian himpunan $\{S^{-1}z\} \subset U$ adalah tak kosong.

Andaikan $\{e_i\}$ suatu basis untuk X maka z dapat dinyatakan :

$$z = \{ {}_1e_1 + \dots + {}_ne_n \}$$

dimana α_i adalah bilangan-bilangan. Jika Su = z maka dapat dinyatakan menjadi :

$$Su = \sum_{i=1}^{n} f_i(u)$$

dimana secara linier merupakan fungsional-fungsional bebas atas u. f_i menghasilkan suatu ruang bagian berdimensi n, katakan $L \subset U$. Karena U suatu ruang hilbert yang dapat disusun seperti $U = L \oplus L^I$. Berdasarkan teorema 2.2.5 dan teorema 2.2.8 terhadap setiap $f \in L$ harus diperoleh $f_i(u) = 0 \ \forall u \in L^I$, akibatnya $L^I \subset N_s$, dimana N_s ruang null dari S

Asumsikan bahwa $u \in N_s$, maka $Su = 0$ dan ini berarti $f_i = 0$, $i = i,\ldots,n$. Jadi $N_s \subset L^I$ untuk mana $N_s = L^I$. Karena L, X memiliki dimensi N, pemetaan S dibatasi terhadap L ditulis dengan S_L injektif dan elemen norm minimum tunggal S_L^{-1}, $L \subset U$, ada berdasarkan teorema 2.2.10.

Andaikan $u + u_1 + u_2$, u sembarang untuk mana $Su = z$ dengan $u_1 \in L$, $u_2 \neq 0$, maka :

$$Su = Su_1 + Su_2$$
$$= Su_1$$

Sedangkan :

$$\|u\| = \|u_1\| + \|u_2\|$$

sehingga $\|u\| > \|u_1\|$ dan $u_1 \in L$ adalah elemen norm minimum yang memenuhi $Su = z$.

BAB IV

RANGKUMAN

1. Andaikan X suatu ruang perkalian dalam dan dan $A \neq 0$ suatu himpunan bagian konveks yang sempurna dimana metriks diinduksikan dengan perkalian dalam. Maka $\forall x \in X$ terdapat dengan tunggal $y \in A$ sedemikia hingga

$$\delta = \inf_{y \in A} \|x - \bar{y}\| = \|x - y\|$$

dan pandang A suatu ruang bagian sempurna dari y dan $x \in X$. Maka $z = x - y$ adalah orthogonal dengan y.

2. Andaikan A sembarang himpunan bagian tertutup dari suatu ruang hilbert H. Maka $H = A \oplus B$, $B = A^{\perp}$.

3. Suatu sistem Σ dikatakan terkendali pada t_0 bila diberikan t_0, $x(t)$ terdapat suatu t, $\tau \in I$, $t \geq \tau$ dan $u \in \Omega$ sedemikian hingga : $\Phi(x(t_0), t, u(\tau), t) = 0$. Dan untuk U ruang hilbert $L^2(I)$ dari ruang pengendalian dapat ditentukan suatu norm minimum $u(t) \in U$ sehingga diperoleh norm - minimum untuk pengendalian sistem.

BAB V

KESIMPULAN

1. Untuk $u \in N_s$ dan $Su = 0$ diperoleh $f_i = 0$, $i = 1,2,\dots n$. Sedemikian hingga apabila L, I memiliki dimensi hingga dan pemetaan S dibatasi terhadap L maka diperoleh suatu elemen norm minimum.

2. Diasumsikan elemen norm minimum u diperoleh menjadi dua elemen baru yaitu u_1 dan u_2 maka pastilah elemen norm u tidak minimum.

3. Dengan mendefenisikan suatu model sistem linier di dalam ruang hilbert diperoleh suatu pengendalian minimum sis - tem yaitu suatu elemen norm minimum di dalam ruang hil - bert yang memenuhi suatu pemetaan berrank hingga.

DAFTAR PUSTAKA

Casti, John L, Linier Dynamical Systems, Academic Press Inc, Boston, 1987.

Doseer, C. A and Vidyasagar, M, Feedback Systems : Input - Output Properties, Academic Press, Inc Orlando, 1975.

Kreyszig, Erwin, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.

Yosida, Kosakue, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1980